

问题表征、工作记忆对小学生 数学问题解决的影响*

宋广文¹ 何文广² 孔 伟¹

(¹ 曲阜师范大学心理科学研究所, 曲阜 273165) (² 北京师范大学心理学院, 北京 100875)

摘 要 以 104 名小学六年级学生为被试, 采用 4 个相对独立的研究探讨了工作记忆广度、问题表征方式与小学生数学应用题解决的关系。结果表明: (1)言语工作记忆广度只影响高难度应用题的解决, 在低难度、中等难度的应用题解决上, 高、低言语工作记忆广度者不存在显著差异; (2)视觉-空间工作记忆广度对低难度、中等难度、高难度应用题的解决都存在影响; (3)问题表征方式影响数学应用题的解决, 应用题的解题成绩与问题表征方式的使用有关; (4)言语工作记忆广度对应用题的表征方式没有影响, 高、低言语工作记忆广度者在三种难度水平应用题的表征方式上不存在显著差异; (5)视觉-空间工作记忆广度对应用题的表征方式存在影响, 高、低视觉-空间工作记忆广度者在三种难度水平应用题的表征方式上均存在组间差异。

关键词 小学生; 工作记忆; 问题表征方式; 数学问题解决

分类号 B844;G447

1 前言

20 世纪 80 年代以来, 问题解决日趋为认知心理学家们所关注。学者们就影响问题解决的心理因素、问题解决的心理过程、问题解决的心理模型等进行了较为系统的研究。路海东、董妍和王晓平的(2004)研究表明: 情境理解、问题表征、问题归类、解题计划、自我评价是影响小学生应用题解决的主要因素。游旭群、张媛、刘登攀和负丽萍(2006)在其研究中则认为, 视空间能力、认知方式、问题表征是影响问题解决的重要因素。两个研究结论虽有差异, 但都突出了问题表征在问题解决中的重要地位, 该结论与国外学者的某些研究构成了互应。Kintch 和 Greeno (1985)将解题过程分为问题表征和问题解决两个阶段, 并主张问题表征是核心。Mayer (1986)也同样认为问题解决包括问题表征和问题解决计划的执行两个阶段。基于此, 为了更细致、深入、系统地探讨问题解决的内在心理机制, 国内外部分学者将研究的兴趣开始转向问题表征的

建构及其模式方面。

问题表征主要是指问题解决者依据自身的知识经验对觉察到的已知条件信息进行解释, 从而发现问题的结构, 构建问题空间, 把外部的刺激情境转化为内部心理符号, 也就是在头脑中构建问题的认知结构、形成问题图式的过程(邓铸, 余嘉元, 2001)。问题表征的能力、质量和方式直接影响到数学应用题的解决。傅小兰和何海东(1995)在研究中指出, 错误的问题表征不可能使问题得到正确解决。陈英和、仲宁宁、田国胜和王治国(2004)在其研究中也发现, 学生问题表征形成的策略对其数学问题的解决有着显著性影响。可见, 问题表征的策略是制约问题解决的首要因素。

Mayer (1986)将数学心理表征分为直接转换策略(direct translation strategy)和问题模型策略(problem-model strategy)。直接转换策略是指个体在解决数学应用题时, 将注意力集中于题目中数字大小的比较或选取一些表示数量关系的个别词语, 然后便使用某种运算法则对数字进行加工处理。整

收稿日期: 2010-12-07

* 山东省教育科学“11.5”规划重点课题(2010GZ009)和山东省重点学科“应用心理学”学科建设资金资助。

通讯作者: 何文广, E-mail: hewenguang1022@163.com

个解题过程只是一种对量的推理的过程。而问题模型策略是指个体面对数学应用题时,首先试图从整体上理解问题情境,理顺命题元素间的相互关系,然后根据情境表征制定解题计划实施运算过程。它是一种强调对问题实质进行推理的过程。路海东和董妍(2003)通过对我国小学生对和错应用题心理表征策略的研究指出,我国小学生对和错应用题的表征存在着两种策略——直译表征和问题模型表征,成功解题者倾向于使用问题模型表征策略,不成功解题者倾向于采用直译策略。陈英和、仲宁宁、赵宏和张小龙(2004)的研究证实了上述结论。

在有关问题解决影响因素的研究中,工作记忆广度备受关注,学者们主要从两个方面对其展开了研究:一方面是探讨不同类型数学学习成绩儿童各种工作记忆广度之间的差异,另一方面是探讨工作记忆广度对各种数学问题解决(如数字推理、类比推理、心算加工、算术认知策略等)的影响(李德明,刘昌,李贵芸,2003;王亚楠,刘昌,2006;王枫,2007;Beckmann, Holling, & Kuhn, 2007)。Baddeley (1992)在其研究中发现,个体工作记忆容量对多位数运算中的进位计算有显著影响。Fletcher (1985)研究发现,数学学习不良儿童在非言语工作记忆任务上的表现更差。Cornoldi, Rigoni, Tressoldi 和 Vio (1999)研究了数学学习不良儿童的视觉-空间工作记忆能力,发现数学学习不良儿童的视觉-空间工作记忆成绩显著低于学习正常儿童。McLean 和 Hitch (1999)研究发现,算术困难儿童的视空间模板具有发展滞后性,视空间模板的发展速度是影响儿童算术问题解决的重要因素。就国内来看,王恩国、刘昌和李贵芸 (2007)对学习困难初二学生的工作记忆容量进行了系统研究。结果表明,不同学习能力组学生的工作记忆容量有着不同程度的分化,言语工作记忆容量对学习困难初二学生的影响大于空间工作记忆容量的影响。宛燕、陶德清和廖声立(2007)研究发现,数学学习困难儿童在言语广度任务和视觉-空间广度任务上的成绩都显著低于正常儿童。刘昌和田云(2005)研究发现,工作记忆对儿童的心算能力和数字推理能力有着显著影响。李晓东、聂尤彦、庞爱莲和林崇德(2002)以数字语句广度任务为实验材料考察了应用题成功解决者和不成功解决者的工作记忆广度差异,发现两类问题解决者的工作记忆广度差异显著。

虽是如此,有关工作记忆、问题表征和问题解

决间关系的研究仍显薄弱。Coonery 和 Swanson (1990)曾指出,有关短时记忆功能、问题图式、问题表征之间的清晰图像在工作记忆容量的研究中还不多见。以往的研究也主要是针对言语工作记忆广度对问题解决的影响,而未探讨过视觉-空间记忆广度对问题解决的影响(Mckenzie, Bull, & Gray, 2003)。根据 Das (左志宏,席居哲,2006)提出的新型智力理论模型(PASS 模型),信息的空间方式编码是一种同时性加工的过程。同时性加工涉及的是对信息进行整合加工的操作,是认知主体在面对一组有序的信息加工任务时依据自己的知识经验将其编码加工成较大的组块,进而对其进行更高级的加工处理以达到问题解决。同时性加工对信息的组织具有相互关联性,使输入的信息可以在抽象概括的水平上加以观察。同时性加工对数学应用题解决的重要影响表现在,它能从整体上理解句子的意义,并对句子表述中的重要信息保持清晰的意识,同时摒弃无关紧要信息的干扰,而这正是问题模型表征策略所需要的认知加工资源。可以看出,信息的空间方式编码对问题解决有重要影响。Wheatley (1997)的研究也表明,个体的空间能力与其数学学习之间关系密切,个体的空间能力与他们对数学概念的理解和掌握有关,高空间能力的学生对数学概念的理解和掌握是扎实而稳固的,能够建构有意义的和相互关联的数学知识网络,而低空间能力的学生只能机械地理解和运用数学知识。因此,本研究趋向于假设:拥有不同工作记忆的被试,其对于数学问题的表征方式会有差异,而正是这种差异性导致其数学问题作业水平的不同。高空间工作记忆的被试能够在全面把握数学问题的基础上,建构问题表征,因此他们在数学问题的解决速度和准确性方面应表现出一定的优势性。高言语工作记忆的被试在数学问题的理解上应表现出一定的优势效应,但在问题表征方式上,与高空间工作记忆的被试会有明显的不同。两种工作记忆对个体问题表征会带来什么样的影响以及对问题解决的影响有何差异,构成了本研究的主要焦点。

2 研究方法

2.1 被试

曲阜市书院街小学六年级同一数学老师教授的两个自然班,共 120 名小学生。经过筛选,剩余有效被试 104 名,其中男生 61 名,女生 43 名,平均年龄为 11.26 ± 0.56 岁。

2.2 实验设计

本研究采用 4 个独立的实验设计,就工作记忆(言语工作记忆/视觉-空间工作记忆)、问题表征方式(直接表征、问题模型表征、其它表征)对数学应用题解决成绩的影响以及言语工作记忆广度和视觉-空间工作记忆广度与问题表征方式之间的关系进行了探讨。

2.3 研究工具

2.3.1 工作记忆广度测验

(1) 言语工作记忆广度

根据 Turner 和 Engle (1989)对运算广度测验的设计原则,自编测验材料。测验题目是一位数的加减算术题,运算结果不大于 10,加减法算式各半,正误数也均各半。算式后伴随一个随机词语(例如:1+8=7 学校),所有词语都选自小学课本。加工任务是让被试判断算式是否正确,储存任务是让被试按呈现顺序回忆算式后的词语。题目分成不同的组,每组中包含题目的数量范围为 2~6 个,以对应不同的广度,每个广度有三套同质的测验,正式测验总共是 60 个题目。

(2) 视觉-空间工作记忆广度

根据宛燕等(2007)设计的旋转广度,自编测验材料。测验题目是向被试呈现变换了角度的数字 2、3、4、5、7,其角度变换有 90、180、270 度三种。数字后伴随一个箭头,箭头的方向以 0、90、180、270 度的角度随机呈现。整个测验中不同角度的数字、箭头呈现的机会均等。加工任务是让被试说出呈现的数字,储存任务是让被试按呈现顺序回忆出箭头的方向。同样,题目分成不同的组,每组中包含题目的数量范围为 2~6 个,以对应不同的广度,每个广度有三套同质的测验,正式测验总共是 60 个题目。

2.3.2 问题表征方式评定 根据路海东等(2004)对数学应用题解决的研究,采用提问单的方式设计问卷。实验中被试每解答完一道应用题后,都要求其在题后写出具体的思考过程,通过对被试思考过程的分析,进行问题表征方式编码。根据被试回答的结果,划分为三类:直接表征、问题模型表征、其它表征。

2.3.3 数学应用题问卷 根据研究目的,参照相关研究自行编写了 30 道不同难度(低、中、高)并且适合直接表征和问题模型表征的应用题,每道应用题的解决都需要对题目隐含的条件进行多步的推理和转换。在小学数学老师的指导下,筛选出 15

道,以不参加测验的平行班的学生为被试,进行预测。通过对题目的项目分析,最后选择了 9 道难度和区分度较好的应用题作为正式测验项目,每种难度水平的题目各三道。

数学应用题的难度以题目的通过率来表示。依据陈霞等(2008)的观点,并结合所编应用题的实际难度分布范围,将 9 道应用题分为低、中、高难度题三类。通过配对样本 t 检验,三种难度类型题目两两之间的得分差异均达到非常显著水平(低中 $t=5.63, p<0.001$; 低高 $t=11.71, p<0.001$; 中高 $t=6.38, p<0.001$)。题目的区分度以题目的辨别力指数(d')为指标,采用极端分组的标准,以前、后 27% 的被试作为划分依据,将 104 名被试的数学应用题成绩分为高、低两组。根据美国测验专家 Ebel (戴海崎,张峰,陈雪枫,2006)提出的用辨别力指数评价题目性能的标准,所编制的题目的区分度都处于良好以上水平。此外,通过独立样本 t 检验考察了高、低两组被试的成绩差异水平。结果表明,高、低两组被试在每道题目上的得分差异均达到非常显著水平($p<0.001$)。

2.3.4 实验仪器 工作记忆广度测验在 14 吋显示器的计算机 1280×800 分辨率下进行。

2.4 研究程序与记分方式

2.4.1 工作记忆广度测验的程序及记分标准 采用单被试施测的方式进行。主试由经过培训的研究生担任。正式测验前,先进行预实验,以保证被试对测验程序完全熟悉,而后开始正式测验。施测时,主试和被试以一对一的方式进行,安排被试坐在计算机前,然后主试向被试说明相应的指导语。

每个广度水平的测验都包括 3 套平行测验,若三套中有两套回答正确,则进行更高广度水平的测验;若三套中只有一套回答正确或全部回答错误,则测验结束。这里“正确”是指每一算式判断正确或阿拉伯数字识别正确,且对应的词语或箭头按顺序回忆正确,即为一套题全部正确。

记分方法:某一工作记忆广度水平的 3 套平行测验中有 2 套正确,则工作记忆广度为该水平数,若只有 1 套正确,工作记忆广度为前一个水平数加 0.5。

2.4.2 数学应用题问题表征方式的编码及记分标准 以 Mayer (1986)提出的解决数学应用题的两种基本表征策略,直接转换策略和问题模型策略为依据,对学生写出的具体思考过程进行编码分析,以区分他们使用的何种问题表征方式。本研究中

对直接表征、问题模型表征和其它表征方式的操作定义为：

(1) 直接表征

① 将原题中表述条件关系的部分重念一遍，然后便得出使用何种运算法则。

② 注意集中于关键词，如“多”、“少”、“余数”、“ $1/2$ ”等。

(2) 问题模型表征

① 将原题中表述条件关系的部分用自己的话进行转换。

② 根据所要求的问题能够进行反向推理，为解决最终问题知道首先要求出哪些条件，即试图建立关系模型来解决问题。

(3) 其它表征

直接表征和问题模型表征以外的表征方式，对应用题的表征似乎与题本身无关，如硬套一些公式或使用与解答该题不相关的术语。

记分方法：对每道应用题的直接表征、问题模型表征和其它表征的使用次数进行统计，采用一次记为 1，未使用记为 0，然后对每个被试在三种难度类型应用题上(每种难度包含 3 道题)所使用的问题表征方式的次数分别进行汇总，最后录入数据库中。

记分由两位研究者独立进行，评分者的一致性达到 90%。对不一致的地方经过研究小组讨论决定。

2.4.3 数学应用题问卷的施测程序及记分标准

施测程序：采用集体施测，分两次进行。首先进行中、低难度应用题的测验，一周后进行高难度应用题的测验。

记分标准：应用题都需要多步列式，以列式的最终结果为标准，最终列式全部正确记 1 分，列式中有一处运算法则用错则该题错误，记 0 分。三种难度应用题的满分均为 3 分。

2.5 数据处理

全部数据在 SPSS 13.0 for Windows 软件系统中输入和处理。

3 结果与分析

3.1 小学生工作记忆广度的特点分析

对本研究中 104 名被试的言语工作记忆广度和视觉-空间工作记忆广度的性别差异分别进行独立样本 t 检验，两种工作记忆广度的性别差异均不显著($t=-0.37, p>0.05$; $t=0.06, p>0.05$)，则分组时不用考虑性别因素的影响，其划分标准以各记忆广度成

绩前 50%和后 50%的被试为界限，将被试分别划分为高、低言语工作记忆广度组和高、低视觉-空间工作记忆广度组。为考察分组的合理性，对两组被试的工作记忆广度成绩进行独立样本 t 检验，结果两种工作记忆广度高、低两组被试的差异非常显著($t=13.80, p<0.001$; $t=14.55, p<0.001$)。

3.2 工作记忆广度对数学应用题解决的影响

3.2.1 言语工作记忆广度对数学应用题解决的影响 言语工作记忆广度高、低组学生解决不同难度应用题的成绩如表 1 所示。

表 1 言语工作记忆高、低组学生解决不同难度应用题的平均数和标准差

言语工作记忆广度组别		低难度题	中等难度题	高难度题
高组	M	2.44	1.79	1.37
	SD	0.78	1.07	0.97
低组	M	2.37	1.94	0.92
	SD	0.93	0.98	0.90

以言语工作记忆广度为自变量(高、低)，被试在不同难度(低、中、高)试题上的得分为因变量，进行两两单因素方差分析，结果发现，言语工作记忆广度只在高难度应用题的解决上主效应显著， $F(1,102) = 5.78, p < 0.05$ ；而言语工作记忆广度在低难度应用题和中等难度应用题的解决上主效应不显著($F(1,102) = 0.21, p > 0.05$; $F(1,102) = 0.58, p>0.05$)。

3.2.2 视觉-空间工作记忆广度对数学应用题解决的影响 视觉-空间工作记忆广度高、低组学生解决不同难度应用题的成绩如表 2 所示。

表 2 视觉-空间工作记忆高低组学生解决不同难度应用题的平均数和标准差

视觉-空间工作记忆广度组别		低难度题	中等难度题	高难度题
高组	M	2.63	2.08	1.44
	SD	0.74	0.99	0.83
低组	M	2.17	1.65	0.85
	SD	0.90	1.03	1.00

以视觉-空间工作记忆广度(高、低)为自变量，被试在不同难度(低、中、高)试题上的得分为因变量，进行两两单因素方差分析，结果表明，视觉-空间工作记忆广度在三种难度应用题的解决成绩上主效应均显著($F(1,102)=8.13, p<0.01$; $F(1,102)=$

4.59, $p < 0.05$; $F(1, 102) = 11.01$, $p < 0.01$ 。

3.3 问题表征方式对数学应用题解决的影响

为了考察不同数学应用题解题成绩者的问题表征方式特点, 根据被试在三种难度应用题解决上的总成绩将其分为成绩高组和低组。同样, 首先对数学应用题成绩的性别差异进行研究, 结果男、女生的数学应用题解题成绩差异不显著 ($t = -0.37$, $p > 0.05$), 则以数学应用题总成绩的前 50% 和后 50% 的被试为划分标准, 把 104 名被试分成成绩高、低两组, 每组 52 人。并对两组被试的成绩进行独立样本 t 检验, 结果如表 3 所示。

表 3 高、低数学成绩组的差异比较

组别	n	M	SD	t	p
高组	52	7.19	1.14	15.16***	0.000
低组	52	3.63	1.25		

从表 3 中可以看出, 数学成绩高、低两组被试的差异非常显著 ($t = 15.16$, $p < 0.001$)。

通过 2×3 的独立性 χ^2 检验, 对数学成绩高、低组在三种难度应用题解决上使用问题表征方式的

情况进行比较。结果表明, 数学成绩组别与其运用的问题表征方式有关。在三种难度应用题的解决上, 高数学成绩组都更倾向于选择问题模型表征策略 (82.0%; 81.9%; 55.8%), 其在三种问题表征方式的使用分配上与低数学成绩组均存在显著差异。结果如表 4 所示。

3.4 工作记忆广度与数学问题表征方式间的关系

3.4.1 言语工作记忆广度与数学问题表征方式间的关系 高、低言语工作记忆广度组在不同难度应用题解决上使用不同表征方式的次数见表 5。通过 2×3 的独立性 χ^2 检验, 对言语工作记忆广度高、低组在三种难度应用题解决上使用问题表征方式的情况进行比较。结果表明, 言语工作记忆广度组别与其运用的问题表征方式无关, 低难度应用题: $\chi^2(2) = 2.31$, $p > 0.05$; 中等难度应用题: $\chi^2(2) = 2.21$, $p > 0.05$; 高难度应用题: $\chi^2(2) = 2.95$, $p > 0.05$ 。在三种难度应用题的解决上, 言语工作记忆广度高、低两组都更倾向于选择问题模型表征策略 (高组: 65.7%; 63.9%; 46.6%; 低组: 71.3%; 66.3%; 42.9%), 并且高低言语工作记忆广度组在三种问题表征方式的使用分配上不存在显著差异。

表 4 高、低数学成绩组在不同难度应用题解决上使用不同表征方式的次数(%)

应用题类型	数学成绩组别	直接表征	问题模型表征	其它表征
低难度题	高组	31(10.1%)	251(82.0%)	24(7.8%)
	低组	75(27.1%)	148(53.4%)	54(19.5%)
中等难度题	高组	35(11.7%)	244(81.9%)	19(6.4%)
	低组	45(18.1%)	112(45.0%)	92(36.9%)
高难度题	高组	99(26.7%)	207(55.8%)	65(17.5%)
	低组	84(31.7%)	78 (29.4%)	103(38.9%)
合计	高组	165(16.9%)	702(72.0%)	108(11.1%)
	低组	204(25.8%)	338(42.7%)	249(31.5%)

表 5 高、低言语工作记忆广度组在不同难度应用题解决上使用不同表征方式的次数(%)

应用题类型	工作记忆组别	直接表征	问题模型表征	其它表征
低难度题	高组	60(20.2%)	195(65.7%)	42(14.1%)
	低组	46(16.1%)	204(71.3%)	36(12.6%)
中等难度题	高组	47(16.8%)	179(63.9%)	54(19.3%)
	低组	33(12.4%)	177(66.3%)	57(21.3%)
高难度题	高组	84(25.8%)	152(46.6%)	90(27.6%)
	低组	99(31.9%)	133(42.9%)	78(25.2%)
合计	高组	191(21.1%)	526(58.3%)	186(20.6%)
	低组	178(20.6%)	514(59.6%)	171(19.8%)

3.4.2 视觉-空间工作记忆广度与数学问题表征方式间的关系 高、低视觉-空间工作记忆广度组在不同难度应用题解决上使用不同表征方式的次数

见表 6。通过 2×3 的独立性 χ^2 检验, 对视觉-空间工作记忆广度高、低组在三种难度应用题解决上使用问题表征方式的情况进行比较。结果表明, 视觉-

空间工作记忆广度组别与其运用的问题表征方式有关,低难度应用题: $\chi^2(2)=16.44, p<0.001$;中等难度应用题: $\chi^2(2)=18.16, p<0.001$;高难度应用题: $\chi^2(2)=8.64, p<0.01$ 。在三种难度应用题的解决上,

高视觉-空间工作记忆广度组在三种问题表征方式的使用分配上与低视觉-空间工作记忆广度组均存在显著差异,高视觉-空间工作记忆广度组更倾向于使用问题模型表征策略(75.4%; 72.4%; 49.9%)。

表 6 高、低视觉-空间工作记忆广度组在不同难度应用题解决上使用不同表征方式的次数(%)

应用题类型	工作记忆组别	直接表征	问题模型表征	其它表征
低难度题	高组	48(15.7%)	230(75.4%)	27(8.9%)
	低组	58(20.9%)	169(60.8%)	51(18.3%)
中等难度题	高组	40(14.0%)	207(72.4%)	39(13.6%)
	低组	40(15.3%)	149(57.1%)	72(27.6%)
高难度题	高组	91(25.5%)	178(49.9%)	88(24.6%)
	低组	92(33.0%)	107(38.4%)	80(28.7%)
合计	高组	179(18.9%)	615(64.9%)	154(16.2%)
	低组	190(23.2%)	425(52.0%)	203(24.8%)

4 讨论

4.1 言语工作记忆广度对不同难度数学应用题解决的影响

研究发现,言语工作记忆广度并不影响低难度应用题和中等难度应用题的解决。这可能是由于本研究中言语工作记忆广度的测量采用了运算-词语广度的测量方法,而应用题作为一种数学文字题,字里行间存在很强的内在逻辑性,需要解题者对题目中的关系命题进行理解并正确识别问题中的数量关系类型,整个解题过程是建构一个完整的问题关系模型的过程。对于低难度和中等难度的应用题,难度较低,涉及的关系命题较简单,需要进行的语义转换也较少,对心理加工资源的需求较低,因此,不同的言语工作记忆广度组在这两种题型上并没有表现出显著的差异。然而,言语工作记忆广度毕竟代表着一种认知加工水平的高低,在高难度的应用题解决上,涉及的语义关系网络较复杂,更需要问题解决者具有抑制无关信息并能够保持与当前任务有关信息的能力,因此,言语工作记忆广度能够预测高难度应用题的解决。

4.2 视觉-空间工作记忆广度与数学应用题解决

研究表明,视觉-空间工作记忆广度对三种难度的应用题解决都存在影响,在三种难度的应用题解决成绩上高视觉-空间工作记忆广度组都显著高于低视觉-空间工作记忆广度组。这与以往研究中得出的结论是一致的(王恩国等, 2007; 王明怡, 陈英和, 2005; 周世杰, 张拉艳, 2004),即视空间能力是影响数学问题解决的一个重要因素,数学学习困

难儿童与他们的视觉空间工作记忆水平密切相关,儿童视觉空间模板发展的快慢影响其在算术认知中的表现,数学学习不良儿童的视空间能力发展滞后是导致其与同年龄儿童数学成绩差异的主要原因。本研究中视觉-空间工作记忆广度是采用非语言文字形式的空间方位材料进行测量的,它反映了认知主体对空间信息暂时储存和加工的能力。根据 Das 等的 PASS 模型,信息的空间方式编码有助于认知主体从整体上对信息进行加工整合,而高视觉-空间工作记忆广度者能更好地加工和保持重要信息,从而有利于问题解决。

4.3 问题表征方式对不同难度数学应用题解决的影响

通过对高、低应用题成绩解决者在不同难度应用题解决上使用的表征方式的研究发现,对于小学六年级学生而言,无论是应用题成绩低组还是成绩高组的学生,他们都倾向于选择更为有效的问题模型表征策略。本研究还表明,应用题的难度影响小学生数学应用题表征方式的选择,随着题目难度的增大,学生使用问题模型表征方式的比率也表现出下降的趋势。这表明,随着题目难度的加大,题目间的数量关系更加复杂,增加了内在认知负荷,超出了工作记忆资源的容量限制,导致认知超负荷,从而使问题得不到有效的表征。

此外,研究发现,在低难度、中等难度、高难度的应用题解决上,应用题成绩高组的学生对问题模型表征策略的使用均显著高于应用题成绩低组。这表明,问题模型表征策略是一种有效的问题解决策略,其有效性来源于学生能够通过对每个问题语

境的理解来建构完整的问题表征。这一过程包括对每一语句的具体分析和全部语义的整合两个阶段,通过分析和整合使小学生完成对问题情境的全面、深刻理解(董妍, 2003)。小学六年级的学生对高级的数学模型表征策略在数学应用题解决过程的重要性已经有了清楚的认识,这与曾盼盼和俞国良(2003)的研究是一致的,即到小学六年级的时候学生已经基本可以区分出各种问题表征方式的解题效果。但是对于应用题成绩较低的学生,他们对问题模型表征策略的使用还不是很成熟,存在对策略的执行能力低下的缺陷。本研究通过对学生解题过程的内容分析发现,学生使用的直接表征或其它问题表征方式是对一些现成公式或逻辑关系推理的生搬硬套,他们不能深刻理解并灵活运用已有的公式,只能机械地使用标准的问题解决程序,而缺乏对问题解决程序进行更新和创造的能力。

4.4 工作记忆广度与数学问题表征方式间的关系

随着应用题难度的不同,被试在问题表征方式的使用分配上表现出明显的差异,即随着应用题难度的加大,问题模型表征策略的使用次数逐渐减少,而直接表征和其它表征策略的使用有逐渐增多的趋势。低言语工作记忆广度组和低视觉-空间工作记忆广度组在不同难度的应用题解决上对问题表征方式的使用两两之间的差异达到了显著性水平;高言语工作记忆广度组在低难度和中等难度应用题中使用的问题模型策略的比率没有显著差异($\chi^2(2)=3.27, p>0.05$),但在高难度应用题中对问题模型表征策略的使用显著降低(低高: $\chi^2(2)=25.49, p<0.001$;中高: $\chi^2(2)=18.27, p<0.001$);高视觉-空间工作记忆广度组学生在低难度和中等难度应用题中使用的问题模型策略的比率没有显著差异($\chi^2(2)=3.51, p>0.05$),但在高难度应用题中对问题模型表征策略的使用显著降低(低高: $\chi^2(2)=48.50, p<0.001$;中高: $\chi^2(2)=33.51, p<0.001$)。这一结果进一步证实了应用题的解决确实需要两种工作记忆广度的参与,并且工作记忆广度水平低者更容易受应用题难度的影响。

然而,在三种难度的应用题解决上,言语工作记忆广度高、低两组在问题表征方式的使用分配上不存在显著差异。这说明本研究中采用的运算-词语广度对言语工作记忆广度的测量方法与数学应用题表征之间存在着不同的认知加工方式,问题表征具有高度的结构性,高级数学问题表征模型的建构是对信息进行同时加工的过程,而不仅仅是对题

目中个别关键词的支离破碎地简单提取和暂时储存。从语音环的作用机制来看,其子成分语音存储系统的重要作用在于对一系列通过言语编码所形成的短暂表征进行维持和保存。张明和沈毅(1992)在探讨工作记忆与理解之间的关系时指出,语音环对句子的理解存在一定的前提,语音环对句子理解的作用受到句子的长度、句法的复杂性以及句中词语概念清晰性的制约。即是说,在加工包含的单词较多、句子较长的信息情境时,语音环的作用是非常重要的,但是对句子的语义成分分析和语法的加工,语音环的作用并不明显。换句话说,语音环在问题理解的初期阶段,对以命题形式的句子进行语义分析时作用并不是很大,而在问题表征信息的后期整合阶段语音环的作用才能更好地体现,因为问题情境模型的建构和各种信息的整合离不开先前语义分析信息的维持和保存。对于应用题的解决,应用题的题干表述一般都力求清晰和简练,因此对表示数量关系关键词的存储和保持显得不那么重要,问题解决的关键在于对句子进行语义分析和理解数量间的相互关系,因此,问题理解阶段具有很大的抽象概括性而不是简单的记忆和存储。

而在三种难度的应用题解决上,视觉-空间工作记忆广度组别与其对三种问题表征方式的使用情况有关,即视觉-空间工作记忆广度高低组的学生在问题表征方式的使用分配上差异显著。在三种难度应用题的解决上,高视觉-空间工作记忆广度组比低视觉-空间工作记忆广度组都更倾向于使用问题模型表征策略。这表明,视觉空间模板在应用题的表征过程中存在着重要作用。从视觉空间模板的认知加工机制上来分析,视觉空间模板参与问题情境模型的建构。数学应用题以相互关联的命题来表述,应用题表征也就是要理解命题间的关系并识别问题的类型。以往研究(负丽萍, 游旭群, 2006)表明,视觉表象有助于问题解决,尤其是在思维和问题解决过程中有些心理操作难以提升到语言层面上来表述时,视觉表象可以减少工作记忆负荷,促进信息的迅速推理。对于应用题解决来说,对事物或事件之间关系和结构的表征也就是思维形象化的过程,视觉-空间能力恰恰有助于对问题的空间关系进行编码和表征,形成有关问题类型的图式。Wheatley (1997)研究也表明,个体的空间能力与其数学学习之间关系密切,个体的空间能力与他们对数学概念的理解和掌握有关,高空间能力的学生对数学概念的理解和掌握是扎实而稳固的,能够建构

有意义的和相互关联的数学知识网络,而低空间能力的学生只能机械地理解和运用数学知识。

综上所述,两种工作记忆广度对应用题解决的影响存在不同的作用机制,其中视觉-空间工作记忆广度与数学应用题的解决关系更为密切。

5 结论

(1) 言语工作记忆广度只影响高难度应用题的解决,在低难度、中等难度的应用题解决上,高、低言语工作记忆广度者不存在显著差异。

(2) 视觉-空间工作记忆广度对低难度、中等难度、高难度应用题的解决都存在影响。

(3) 问题表征方式影响数学应用题的解决,应用题的解题成绩与问题表征方式的使用有关。

(4) 言语工作记忆广度对应用题的表征方式没有影响,高、低言语工作记忆广度者在三种难度水平应用题的表征方式上不存在显著差异。

(5) 视觉-空间工作记忆广度对应用题的表征方式存在影响,高、低视觉-空间工作记忆广度者在三种难度水平应用题的表征方式上均存在组间差异。

参 考 文 献

- Baddeley, A. D. (1992). Working memory. *Science*, 255, 556-559.
- Beckmann, B., Holling, H., & Kuhn, J. T. (2007). Reliability of verbal-numerical working memory tasks. *Personality and Individual Difference*, 43, 703-714.
- Chen, X. (2008). *The influence on solving geometry problems from meta-cognition*. Unpublished master's thesis, Qufu Normal University.
- [陈霞. (2008). 工作记忆、元认知对学生几何问题解决的影响. 硕士学位论文, 曲阜师范大学.]
- Chen, Y. H., Zhong, N. N., Tian, G. S., & Wang, Z. G. (2004). A study of difference of elementary second to fourth graders representation strategy in arithmetic word problem. *Psychological Development and Education*, 4, 19-24.
- [陈英和, 仲宁宁, 田国胜, 王治国. (2004). 小学2-4年级儿童数学应用题表征策略差异的研究. *心理发展与教育*, 4, 19-24.]
- Chen, Y. H., Zhong, N. N., Zhao, H., & Zhang, X. L. (2005). A study of the effect of elementary students' representation strategy on solving irregular word problems. *Psychology Science*, 28(6), 1314-1317.
- [陈英和, 仲宁宁, 赵宏, 张小龙. (2005). 小学2-4年级儿童数学应用题表征策略对其解决不规则问题影响的研究. *心理科学*, 28(6), 1314-1317.]
- Cooney, J. B., & Swanson, H. L. (1990). Individual differences in memory for mathematical story problems: Memory span and problem perception. *Journal of Educational Psychology*, 82(3), 570-577.
- Cornoldi, C., Rigoni, F., Tressoldi, P. E., & Vio, C. (1999). Imagery deficits in nonverbal learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 32, 48-57.
- Dai, H. Q., Zhang, F., & Chen, X. F. (2006). *Mental and education test* (pp. 117-118). Guangzhou, China: Jinan University Press.
- [戴海崎, 张锋, 陈雪枫. (2006). *心理与教育测量* (pp. 117-118). 广州: 暨南大学出版社.]
- Deng, Z., & Yu, J. Y. (2001). The external representation and the internal representation of problem in problem-solving. *Journal of Developments in Psychology*, 9, 193-200.
- [邓铸, 余嘉元. (2001). 问题解决中对问题的外部表征和内部表征. *心理学动态*, 9(3), 193-200.]
- Dong, Y. (2003). *An effect of questions' representation on mathematical problems solving of the primary students*. Unpublished master's thesis, North East Normal University.
- [董妍. (2003). 工作记忆、问题表征方式对小学生数学问题解决影响的研究. 硕士学位论文, 东北师范大学.]
- Fletcher, J. M. (1985). Memory for verbal and nonverbal stimuli in learning disability subgroups: analysis by selective reminding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 40, 244-259.
- Fu, X. L., & He, H. D. (1995). A study on the process of problem representation. *Acta Psychologica Sinica*, 27(2), 205-209.
- [傅小兰, 何海东. (1995). 问题表征过程的一项研究. *心理学报*, 27(2), 205-209.]
- Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.(3), 90-95.
- Li, D. M., Liu, C., & Li, G. Y. (2003). Development in digit working memory span across the life span and its influential factors. *Acta Psychologica Sinica*, 35(1), 63-68.
- [李德明, 刘昌, 李贵芸. (2003). 数字工作记忆广度的毕生发展及其作用因素. *心理学报*, 35(1), 63-68.]
- Li, X. D., Nie, Y. Y., Pang, A. L., & Lin, C. D. (2003). The effects of working memory on performance of third graders solving compare problems. *Psychological Development and Education*, 19(3), 41-45.
- [李晓东, 聂尤彦, 庞爱莲, 林崇德. (2003). 工作记忆对小学三年级学生解决比较问题的影响. *心理发展与教育*, 19(3), 41-45.]
- Liu, C., & Tian, Y. (2005). Processing speed, working memory and the development of mental arithmetic. *Journal of Nanjing Normal University (Social Science Edition)*, (3), 90-95.
- [刘昌, 田云. (2005). 加工速度、工作记忆与心算能力的发展. *南京师大学报 (社会科学版)*, (3), 90-95.]
- Lu, H. D., & Dong, Y. (2003). Study on arithmetic word problems representation strategies of primary students. *Psychological Development and Education*, 19(1), 60-63.
- [路海东, 董妍. (2003). 小学生表征数学应用题策略的实验研究. *心理发展与教育*, 19(1), 60-63.]
- Lu, H. D., Dong, Y., & Wang, X. P. (2004). A study of the cognitive mechanisms of primary school students' solving word problems. *Psychology Science*, 27(4), 867-870.
- [路海东, 董妍, 王晓平. (2004). 小学生数学应用题解决的认知机制研究. *心理科学*, 27(4), 867-870.]

- Mayer, R. E. (1986). Mathematics. In R. F. Dillon & R. J. Stenberg (Eds.), *Cognition and instruction* (pp. 125–127). Orland: Academic Press.
- Mckenzie, B., Bull, R., & Gray, C. (2003). The effects of phonological and visual-spatial interference on children's arithmetical performance. *Educational and Child Psychology*, 20(3), 93–108.
- McLean, J. F., & Hitch G. J., (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 240–260.
- Tuner, M. L., & Engle, R. W. (1989). Is working memory capacity task dependent? *Journal of Memory and Language*, 28, 127–154.
- Wan, Y., Tao, D. Q., & Liao, S. L. (2007). Working memory capacity of mathematical learning disabilities in primary schools. *Chinese Journal of Special Education*, (7), 46–51.
- [宛燕, 陶德清, 廖声立. (2007). 小学数学学习困难儿童的工作记忆广度研究. *中国特殊教育*, (7), 46–51.]
- Wang, E. G., Liu C., & Li G. Y. (2007). Working memory capacity of adolescents with learning disability. *Chinese Mental Health Journal*, 21(9), 587–590.
- [王恩国, 刘昌, 李贵芸. (2007). 学习困难初二学生的工作记忆容量. *中国心理卫生杂志*, 21(9), 587–590.]
- Wang, F. (2007). *Working memory, analogy reasoning and the solving word problems of Primary Students from 2 grade*. Unpublished master's thesis, Central China Normal University.
- [王枫. (2007). 工作记忆、类比推理与小学二年级学生数学应用题解决. 硕士学位论文, 华中师范大学.]
- Wang, M. Y., & Chen, Y. H. (2005). Working memory components and children's arithmetical cognition. *Psychology Science*, 28(3), 611–613.
- [王明怡, 陈英和. (2005). 工作记忆成分与儿童算术认知. *心理科学*, 28(3), 611–613.]
- Wang, Y. N., & Liu, C. (2006). The development of digit reasoning and its relation to processing speed and working memory. *Psychology Science*, 29(5), 1081–1085.
- [王亚南, 刘昌. (2006). 加工速度、工作记忆与数字推理能力的发展. *心理科学*, 29(5), 1081–1085.]
- Wheatley, G. H. (1997). Enhancing mathematics learning through imagery. *Journal of Arithmetic Teacher*, 39, 34–36.
- You, X. Q., Zhang, Y., Liu, D. F., & Yun, L. P. (2006). A study on the influence of visual-spatial ability, cognitive style and representation strategy on pupil's mathematical performance. *Psychology Science*, 29(4), 868–873.
- [游旭群, 张媛, 刘登攀, 负丽萍. (2006). 小学生数学应用题解题水平影响因素的研究——视空间能力、认知方式及表征方式的影响. *心理科学*, 29(4), 868–873.]
- Yun, L. P., & You, X. Q. (2006). The study on the influence on primary pupil's mathematical performance. *Psychological Exploration*, 26(4), 63–67.
- [负丽萍, 游旭群. (2006). 小学生数学应用题解题水平影响因素的实验研究. *心理学探新*, 26(4), 63–67.]
- Zeng, P. P., & Yu, G. L. (2003). A study on types of visual-spatial representations and mathematical problem solving among elementary school students. *Psychology Science*, 26(2), 268–271.
- [曾盼盼, 俞国良. (2003). 小学生视觉-空间表征类型和数学问题解决的研究. *心理科学*, 26(2), 268–271.]
- Zhang, M., & Shen, Y. (2002). The review of study on the relationship between working memory and comprehension. *Journal of Northeast Normal University (Social Science)*, (2), 121–127.
- [张明, 沈毅. (2002). 工作记忆与理解关系的研究与展望. *东北师大学报 (哲学社会科学版)*, (2), 121–127.]
- Zhou, S. J., & Zhang, L. Y. (2004). Working memory in learning disabled children. *Chinese Journal of Clinical Psychology*, 12(3), 313–317.
- [周世杰, 张拉艳. (2004). 学习困难儿童的工作记忆研究. *中国临床心理学杂志*, 12(3), 313–317.]
- Zuo, H. Z., & Xi, J. Z. (2006). Application of PASS theory in the field of mathematics learning disabilities. *Chinese Journal of Special Education*, (3), 74–78.
- [左志宏, 席居哲. (2006). PASS理论在数学学习困难研究领域中的应用. *中国特殊教育*, (3), 74–78.]

Influence of Problem Representation and Working Memory Span on Pupils' Mathematical Problem Solving

SONG Guang-Wen¹; HE Wen-Guang²; KONG-Wei¹

(¹ Institute of Psychology, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

(² School of Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract

Since 1980's systematic researches have been made on mental processes, influencing factors and psychological models of problem solving. The researches found that problem context, problem representation

types, mental preparation, working memory, cognitive styles, and self-evaluation are the main factors for problem solving (Lu haidong, 2004; You xuqun, 2006; Chen yinghe, 2004; Beckmann et al., 2007). Some researchers pointed out that problem representation and problem solving plans are the basic inner processes (Kintch & Greeno, 1985; Greeno, 1986). Along with deeper studies, direct translation strategy and problem-model strategy (Mayer, 1996) were considered as the main representation types, and working memory as the major factor for problem representation type (Baddeley, 1992; Cornoldi, 1999; Mclean, 1999; Wang enguo, 2007; Wanyan, 2007). However, the past studies paid much attention to how verbal working memory affected problem representation, while there were few studies on how visual-spatial memory span influenced problem representation in mathematics. As a hypothesis, we thought that it was the individual differences in working memory that resulted in different problem representation in mathematics, which led to different performances in mathematical assignments. Those with a high spacial working memory span, based on an overall comprehension of the problem, could construct a good problem representation, and would show superiority in high speed and accuracy in mathematical problem solving. Those with a high verbal working memory span, might display an advantage in comprehension of mathematical problems. However, compared with the high visual-spatial memory span group, they might have different problem representation. This study was especially concerned about whether there were differences in problem representation and problem solving between the two groups with different working memory.

This study included four separate experiments. 104 Grade 6 pupils from primary school (male, 61, female, 43, $M_{age}=11.26\pm0.56$) participated in the study. Four tests were carried out, concerning mathematical problems, problem representation, verbal working memory span and visual-spatial working memory span respectively. All subjects were tested by mathematical works and cognitive behavior.

By using one-way analysis of variance and χ^2 test, this study found:

1. Verbal working memory span showed a main effect in high level difficult word problem solving ($F(1,102)=5.78, p<0.05$), and had no main effect in low and middle level difficult word problem solving ($F(1,102)=0.21, p>0.05$; $F(1,102)=0.58, p>0.05$).

2. Visual-spatial working memory span showed a main effect in the three level difficult word problem solving ($F(1,102)=8.13, p<0.01$; $F(1,102)=4.59, p<0.05$; $F(1,102)=11.01, p<0.01$).

3. The mathematical scores were correlated with problem representation. When solving the three level difficult problems, the high score group had a tendency to choose problem-model strategy (82.0%; 81.9%; 55.8%). There were significant differences in problem representation in the three level difficult problems between the high and low score group.

4. There were no relations between verbal working memory span and problem representation types (low difficult problem: $\chi^2(2)=2.31, p>0.05$; middle difficult problem: $\chi^2(2)=2.21, p>0.05$; high difficult problem: $\chi^2(2)=2.95, p>0.05$). When solving the three level difficult problems, both the high and low verbal working memory span groups tended to choose problem-model strategy (high group: 65.7%; 63.9%; 46.6%; low group: 71.3%; 66.3%; 42.9%), and there were no significant differences between the high and low verbal working memory span group in selecting problem representation types.

5. There were correlations between visual-spatial working memory span and problem representation types (low difficult problem: $\chi^2(2)=16.44, p<0.001$; middle difficult problem: $\chi^2(2)=18.16, p<0.001$; high difficult problem: $\chi^2(2)=8.64, p<0.01$). In solving the three level difficult problems, there were significant differences between the high and low visual-spatial working memory span group in selecting problem representation types, and the high visual-spatial working memory span group more likely chose problem-model strategy (75.4%; 72.4%; 49.9%).

Key words pupil; working memory; problem representation type; mathematical problem solving