

儿童数字估计中的心理长度*

莫 雷¹ 周广东¹ 温红博²

(¹ 华南师范大学心理应用研究中心, 广州 510631) (² 北京师范大学教育学部, 北京 100875)

摘 要 从儿童对数字属性的认识角度探讨一年级儿童在不同数字范围中采用不同表征形式的根本原因。两个实验均采用数字线估计任务, 实验一测量一年级儿童在 15cm 数字线长度下 0~100 与 0~1000 两种范围上的数字估计; 实验二测量一年级儿童对 0~1000 范围 10cm 和 20cm 数字线长度的估计。结果显示, 无论在不同的数字范围还是在不同的数字线长度下, 儿童对低端数字的估计均存在心理长度, 即儿童倾向于将低端数字与固定的线段长度对应起来, 且这种对应关系不随数字范围与数字线长度的变化而变化。心理长度的存在是儿童在不同数字范围和不同数字线长度中采用不同数字表征形式的根本原因, 也是儿童对数概念的认识发展到等距水平时出现的一种独特特点。

关键词 心理长度; 数字估计; 对数表征; 线性表征
分类号 B844

1 前言

估计(Estimation)是从一种数量表征转换为另一种数量表征的过程, 转换过程中只要有一项表征形式涉及到数字的估计便可称为数字估计(Numerical Estimation) (Siegler & Booth, 2004)。数字线估计(Number Line Estimation)任务因其不涉及数以外的知识和较高的生态效度而逐渐成为数字估计的主要研究范式, 其具体做法是让被试估计一个数在一条两端标有起始点的线段上的位置。

儿童在数字线估计任务中的表现反应了他们的数表征形式。当前研究显示, 儿童的数表征主要有对数表征与线性表征两种形式。线性表征是一种精确的数字表征形式, 它以相等的距离来区分 n 和 $n+1$, 但对数表征则认为 1 和 2、2 和 4、4 和 8 之间的距离是相等的, 这样 n 和 $n+1$ 的不同将随 n 的增大而变小(n 为任意自然数)。按照这种表征方式, 对于某一范围内的数字, 人们倾向于扩大低端数字间的差距, 而缩小高端数字间的差距(Dehaene, 1997)。有关儿童数字估计与表征的发展性研究显

示, 随着年龄的增长, 儿童数字估计的精确性不断提高, 表征形式也逐渐由对数表征向线性表征转化(Siegler & Opfer, 2003; Siegler & Booth, 2004)。对美国儿童的研究结果显示, 在 0~100 数字线估计任务中, 大多数幼儿园儿童在估计中采用了对数表征, 大约有一半一年级儿童采用对数表征, 另一半采用线性表征, 大多数二年级儿童采用了线性表征(Siegler & Booth, 2004)。在 0~1000 数字线估计任务中, 大多数二年级儿童采用对数表征, 大约有一半四年级儿童采用对数表征, 另一半则采用线性表征, 大多数六年级儿童采用线性表征(Siegler & Opfer, 2003)。

跨文化研究显示, 中美儿童存在数字估计的发展性差异, 中国儿童精确数字估计能力的出现要早于美国儿童(周广东, 莫雷, 温红博, 2009)。周广东等人(2009)对中国儿童数字估计的研究显示, 在 0~100 数字线估计任务中, 大多数幼儿园儿童采用了对数表征, 大多数一、二年级儿童采用了线性表征; 在 0~1000 数字线估计任务中, 有一半一年级儿童采用对数表征, 另一半采用线性表征, 其中, 在

收稿日期: 2009-03-30

* 教育部哲学社会科学研究重大课题攻关项目(05JZD00034), 教育部人文社会科学重点研究基地 2004 年度重大项目(05JJDXXL005)。

通讯作者: 莫雷, E-mail: molei@scnu.edu.cn

0~100 数字线估计任务中采用线性表征的一年级儿童有 41%在 0~1000 数字线估计任务中转而采用了对数表征;而大多数三五年级儿童采用了线性表征。

中国一年级儿童与美国二年级儿童的数字表征显示了非常有趣的结果,他们在 0~100 数字线估计中采用线性表征,而在 0~1000 数字估计中更倾向于采用对数表征,这一结果似乎说明,即便在同一年龄阶段,儿童也会在不同的数字范围中选择不同的数字表征形式。

以上发展性的研究很自然地引发出两个发展心理学家非常关注的问题,其一,从纵向的发展上来说,儿童是如何从不精确的对数表征转向精确的线性表征的?其二,从横向的比较中来看,儿童在不同数字范围下是如何选择不同的表征形式的?

对于第一个问题,Dehaene, Izard, Spelke 和 Pica (2008)以及 Opfer 和 Siegler (2007) 分别给出了他们的回答。Dehaene 等人(2008)认为文化教育是促进儿童由对数表征转向线性表征的主要原因,Dehaene 等人(2008)的跨文化研究显示,对于有较少数字记载和几乎没受过教育的亚马逊河附近的土著居民 Mundurucu,他们对于符号的数字和用音调及点来表示的非符号数字的表征形式即使是成年人也是对数形式,而西方成人只对较大的非符号数字采用对数表征,而对较小的非符号数字和所有的符号数字均采用线性表征。这一结果表明,人类最初的表征形式是对数表征,线性表征是教育及文化的产物。Opfer 和 Siegler (2007)则认为对估计最不准的数字的反馈才是促使儿童由对数表征向线性表征转化的原因,他们的微观发生学研究显示,对美国二年级儿童在 0~1000 数字估计中进行 150 附近数字的反馈,发现他们会从先前的对数表征转向线性表征,且这种转变是突然的、整体性的。

另外, Sieglar (1996) 还提出重叠波理论(overlapping waves theory)来解释儿童数表征模式的变化及在不同数字范围中的表征选择,这一理论也为上述的第二个问题提供了一种见解。该理论认为任何年龄阶段的儿童都知道并可运用多种相互竞争的表征,哪种表征能得到运用取决于问题和情境,随着不同的表征运用到不同的情境中去,有关何种表征适合何种情境的信息会在经验中不断累积,可选择性也会越来越大。在获得表征的适当性信息前,个体会重复以前的行为,这是许多年龄较大儿童仍不能精确估计的重要原因,因为他们还没

有获得有关精确表征的新信息。那么何种经验才会促进人们由不精确的表征转向精确的表征呢? Opfer 和 Siegler (2007)认为反馈是一种有效的形式,人们一旦获得了这种有关精确表征的经验,就会放弃旧的表征形式,而选择新的表征形式,且这种变化是突然的、整体性的。强调在不同表征之间进行选择是重叠波理论的最大特点。

然而,认真思考重叠波理论的观点,它用经验累积、情境的新颖性、反馈与获得表征适当性的信息来解释同一年龄阶段的儿童为什么会在不同问题情境中采用不同的表征模式,尤其是用来解释儿童随着年龄的增长逐步由对数表征发展到线性表征,似乎是不合理的。理由有两个方面:第一,在现实的社会生活中,儿童发展过程中是很少会获得不同情境中数字估计的经验的,也无法经过反馈而获得新的有关何种表征更为适合的信息,那么,他们是如何从不准确的对数表征发展到准确的线性表征的呢?第二,按照叠波理论,将数字估计中出现的对数模式作为儿童的一种策略或者是运算模式,也是值得质疑的,因为,无论从人类认识史还是个体认知发展过程来看,对数概念的出现都要晚于线性概念,那么,为什么儿童在数字估计发展过程反而是对数表征先出现呢?据此,我们设想,即使儿童在数字估计过程中首先出现对数表征,也只可能是由于其他原因而导致的一个现象,而不是他们进行数字估计的一种策略或一种运算模式。

根据这两点质疑,再结合本研究的结果,我们认为,年幼儿童数字估计之所以出现对数模式,并不是他们真正在运用对数策略去进行数字估计,而是由于他们在一定长度数字线范围内可能对低端的数字有对应着不变的心理长度,所谓“心理长度”是指儿童将低端数字与固定的线段长度对应起来的特点。我们认为心理长度是导致儿童在不同数字范围下采用不同表征形式的根本原因,心理长度的存在反应了儿童对数的等距属性的认识,在这种认识没有发展到等比属性之前,儿童真正的线性表征是不可能的。因此,本研究在关注儿童数字估计中横向的表征变化之余,拟以心理长度为切入点来统合以往研究,并进一步探讨儿童数字估计中的表征变化及其独特特点。

心理长度的提出并非毫无依据,周广东等人(2009)在有关数字估计的表征模式与发展的实验中发现,虽然在估计过程中不让儿童用尺子量,但他们还是会很本能的用手去一段一段地量,仿佛像数

数一样,于是我们猜想,由于一年级儿童是接受正规数字体系教育的开始,在这种数形结合的早期,儿童会不会将某一固定的数与某一固定的线段长度结合起来,比如他们会认为“1”大概有 0.5cm 那么长,若估计 10 在 0~100 数字线中的位置,只需从最左端的 0 处向右数 10 个 0.5cm 就是 10 所在的位置了。如果这种分析是正确的话,儿童必然会高估低端的数字,因为在 15cm 数字线长度 0~100 数字范围下的数字估计任务中,一个数字只占 0.15cm 的长度,也就是说如果儿童开始就高估了“1”这一数字所占的线段长度,那么在随后的数字估计中会估计的更高,精确性也就更差,但我们可以预期这种较大的误差不会一直持续到估计的最后,因为对于 0~100 中间的一些数字他们只需估计线段的中点就可以轻而易举地确定位置,而无需再一个个数数,而数字线中点是儿童最容易估计的,所以,对于数字线中间的数字,其绝对误差应该最小。如果以上的分析是正确的话,我们自然会想到,对于数字线末端的数字儿童会不会采用倒数的策略来完成估计呢,如果真是这样,那么对于数字线末端的数字应该呈现出与低端数字相似的结果。

基于以上的分析,我们设计了两个实验来验证儿童数字估计的这种特点,基于表述的简洁性和科学性的考虑,我们把儿童将低端数字与固定的线段长度对应起来的这种特点称为“心理长度”。如果在个体数字估计发展初期确实有这种心理长度的存在,那么,他们在进行低端数字的估计时,在一定程度上无论是变化数字范围还是变化数字线长度,都不应该引起他们估计的实际线段长度的变化。也就是说,第一,当数字线长度相同,而表示的数字范围发生变化时,儿童对同一低端数字估计的实际线段长度应基本不变。例如,用 15cm 的线段分别表示 0~100 的数值和 0~1000 的数值,儿童在两种情况下估计 10 以下同一数字的实际长度应基本不变。选 1~10 作为心理长度的存在依据是因为这 10 个数是儿童日常生活中最常出现及最经常用到的。第二,在同一数字范围下,当数字线的长度在一定程度上发生变化时,儿童对同一低端数字估计的实际线段长度应该也是基本不变。例如,用 10cm 的线段或者用 20cm 的线段来表示 0~1000 的数值,儿童在两种线段上估计 10 以下同一数字的实际线段长度应基本不变。

根据上述设想,本研究设计两个实验,探讨儿童数字估计发展初期是否存在心理长度,以及心理

长度是如何影响儿童在不同情境下选择不同表征模式的。实验一考察在相同数字线长度不同数字范围下儿童的数字估计是否存在心理长度,数字范围选取 0~100 与 0~1000 两个水平;实验二考察在相同数字范围、不同数字线长度下,低年级儿童是否存在心理长度,并表现出数字表征的变化。由于以往研究(周广东等,2009)已经证实一年级儿童在 0~100 数字范围的长度估计表现出线性表征,即中国一年级儿童已经能对这一范围的数字进行精确估计,因此,要考察其表征变化,最好选择较大范围的数字,即 0~1000,在这一数字范围下变化线段长度更能体现出由于心理长度的不变性与数字线长度的变化而导致的表征形式的变化,由此可见,实验二中,0~1000 范围的数字是较好的选择。

2 实验 1: 不同数字范围中的心理长度

2.1 研究目的

探讨在用相同长度的数字线表示不同数字范围的情况下,小学一年级儿童对低端数字估计的实际线段长度是否发生变化,从而探讨儿童进行数字估计时是否存在心理长度,以及儿童数字估计表现出来的对数模式或者线性模式是否可以用这种心理长度进行解释。

2.2 研究方法

2.2.1 被试 广州市天河区昌乐小学一年级儿童 26 名,男生 16 名,女生 10 名($M = 7.38$, $SD = 0.68$)。

2.2.2 材料 实验材料为一个 31 页纸装订在一起的小册子,小册子的第一页是登记被试基本资料的一个表格,包括性别、年龄及班级,其余 30 页为正式的实验材料,在每一页的中间印有一条长 15cm 的线段,在线段的两端分别标有 0 和 100(或 1000),中间无任何标记,在线段中间上方 2cm 处印有一个圆圈,圆圈里印有一个让被试估计的数字,如“9”。除圆圈里的数字不同外,每一页在其它方面均相同,每一小册子上的数字均为随机呈现。

我们在 0~100 和 0~1000 数字范围上各选取了 30 个数字,选取较多的低端数字一方面是为了检验低端数字是否存在心理长度,另一方面是为了区分不同的表征模型;而末端数字被较多的选取是为了检验儿童是否会在估计中采用倒数的策略。因此,每一数字范围内的前 10 个与后 10 个数字皆入选,其它的数字基本上是平均分配,具体数字如下:

0~100: 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、12、

17、21、24、33、48、57、64、72、81、90、91、92、93、94、95、96、97、98 和 99。

0~1000: 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、33、79、122、246、366、423、548、606、722、894、990、991、992、993、994、995、996、997、998 和 999。

2.2.3 实验程序 每名主试一次负责测试 4~5 名被试, 被试之间禁止交流, 每名被试一本小册子, 在被试填写完基本信息之后, 主试人员告诉被试, 我们今天做一个有关数字线估计的测试, 但这不计入你的学习成绩, 在小册子的第二页到最后一页为测试题, 在每一页的中间有一条数字线, 在数字线的左边标有“0”, 右边标有“100”(或“1000”), 如果线段的左边代表“0”, 右边代表“100”(或“1000”), 那么你认为线段上方圆圈里的数字应该在数字线的哪个位置, 请你想好之后用笔在线段上画一条竖

线来表示出这一数字的位置。实验过程中不允许用直尺量, 也无任何反馈。

每名被试都做两种数字范围的估计, 为平衡顺序效应, 一半被试先做 0~100 数字范围的估计, 再做 0~1000 数字范围的估计, 另一半则相反。对被试的估计结果由一名主试以直尺测量, 精确到毫米, 然后再转化成估计值。

2.3 结果与分析

2.3.1 儿童在不同数字范围情况下对两端数字估计的实际长度的比较 为考察儿童对低端数的估计是否存在心理长度, 我们分别计算出被试在相同长度的数字线中 0~100 和 0~1000 两种数字范围条件下低端数字(1~10)被估计的实际长度, 即从 0 到数字被估计位置的距离, 对同一低端数字在不同数字范围下对应的实际线段长度进行配对 t 检验, 结果见表 1。

表 1 不同数字范围下低端数字估计的实际长度比较

估计数字	实际线段长度(cm)(0~100)	实际线段长度(cm)(0~1000)	$t(df=25)$	p
1-1	0.37±0.25	0.38±0.27	-0.56	0.58
2-2	0.80±0.55	0.77±0.43	0.54	0.59
3-3	1.08±0.96	1.12±0.68	-0.30	0.77
4-4	1.35±1.36	1.25±0.60	0.48	0.63
5-5	1.79±1.85	2.08±1.66	-0.72	0.48
6-6	1.93±1.51	1.91±1.34	0.13	0.90
7-7	2.07±1.60	2.30±1.27	-0.70	0.49
8-8	2.59±1.44	2.50±1.22	0.52	0.61
9-9	2.31±1.18	2.83±2.64	-1.12	0.27
10-10	3.88±3.04	2.49±1.61	2.53	0.02

表 1 结果显示, 当数字范围从 0~100 变化至 0~1000 时, 对 1~9 估计的实际长度并未相应发生变化, 由此可见, 儿童的确将低端数字与固定的线段长度对应了起来, 即使数字范围增大了 10 倍, 儿童这种将数字与线段长度一一对应的关系仍然没什么变化。我们将儿童这种把低端数字与固定的线段长度一一对应的关系称为低端数字的“心理长度”。确切地说, 是儿童将“1”与某一固定的线段长度对应起来(如本实验中“1”在不同的数字范围下对应的线段长度为 0.37 到 0.38 之间), 他们对 2~9 这些数字的估计基本上是将“1”对应的线段长度进行一个个叠加的结果, 这样, 当数字线的长度与他们低端数字的心理长度比例相当的情况下, 如在 0~100 数字范围的数字线为 15cm 的情况下, 儿童低端数字的心理长度就与数字的实际长度基本符合, 这样就

表现出线性模式; 而在 15cm 的数字线表示 0~1000 的情况下, 其低端数字的心理长度就会大大超出数字应该占有的实际长度, 因此出现高估现象, 而对数表征正是一种高估低端数字的表征形式。

随着数字的不断增大, 儿童的这种数数式的叠加线段长度的估计会变得越来越困难, 因此其精确性也就越来越差, 当儿童开始意识到这种叠加线段长度过大时, 就会开始调整估计行为, 对于 10 这一数字在不同数字范围下显现出了明显差异很可能就是这种调整的结果。总体来说, 儿童这种叠加线段长度的做法随着数字的增长有凝缩的趋势, 这可能一方面是因为叠加太多数会变得越来越不准, 另一方面儿童这种高估低端数字的情况会与随后对中间数字的准确估计相矛盾, 并据此做出一定程度的调整。

另外，为考察儿童对末端数字的估计是否采用了倒数心理长度的策略，我们分别计算出被试在相同长度的数字线中 0~100 和 0~1000 两种数字范围下末端数字被估计的实际线段长度，即从末端数字被估计的位置到终点(100 或 1000)的距离，对同一末端数字在不同数字范围下对应的实际线段长度进行配对 *t* 检验，结果见表 2。

表 2 结果显示，对于最末端的两个数字，不同的数字范围下其所对应的线段长度有明显差异，而其它 8 个末端数字则没有这种差异。由于儿童对末

端数字的估计并未出现趋势一致的结果，因此还无法说明儿童对此采用了倒数的策略。但由于末端的其它八个数字符合心理长度的预期，因此也不能排除心理长度对末端数字的影响。

2.3.2 表征模式 为探讨儿童在数字估计中的表征模式，我们以呈现的被估计数值为自变量，以估计值的平均数为因变量(选平均数为因变量是为了与心理长度的结果保持统一性和可比较性)，选取线性模型及对数模型两种表征形式对一年级儿童的数字估计进行曲线拟合，结果如图 1。

表 2 不同数字范围下末端数字估计的实际线段长度比较

估计数字	实际线段长度(cm)(0~100)	实际线段长度(cm)(0~1000)	<i>t</i> (<i>df</i> =25)	<i>p</i>
99-999	0.56±0.38	1.20±0.78	-4.87	0.00
98-998	1.32±0.93	1.99±1.26	-2.13	0.04
97-997	1.93±1.21	2.18±1.76	-0.62	0.54
96-996	2.10±1.24	2.55±1.87	-0.98	0.34
95-995	2.60±1.48	3.10±2.56	-0.82	0.42
94-994	1.87±2.57	2.82±2.02	-1.36	0.19
93-993	3.35±2.64	2.66±2.05	1.28	0.21
92-992	2.30±0.91	3.18±2.36	-1.75	0.09
91-991	2.22±0.89	3.31±2.99	-1.70	0.10
90-990	3.26±1.53	3.42±2.14	-0.35	0.73

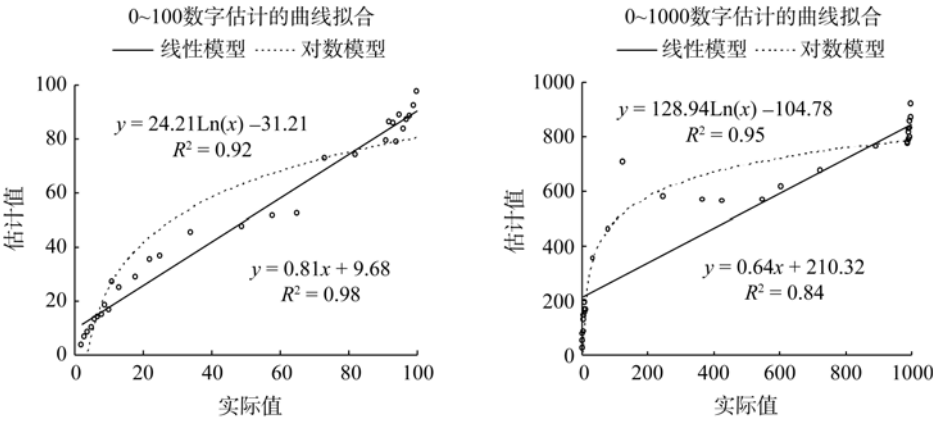


图 1 以平均数为因变量的不同数字范围下数字估计的曲线拟合图

图 1 结果显示，一年级儿童对 0~100 的数字估计更符合线性表征($R^2_{lin}=0.98 > R^2_{log}=0.92$)，对两模型预测值残差的配对 *t* 检验结果显示，线性模型的拟合度显著好于对数模型， $t(29) = -3.58, p=0.001$ 。一年级儿童对 0~1000 的数字估计更符合对数表征($R^2_{log}=0.95 > R^2_{lin}=0.84$)，对两模型预测值残差的配对 *t* 检验结果显示，对数模型的拟合度显著好于线性模型， $t(29)=2.42, p=0.02$ 。

为了检验曲线拟合中以平均数和以中位数作

为因变量是否有显著差异(因为以往的研究皆以中位数为因变量进行曲线拟合)，我们将估计值的因变量变为中位数重新进行了曲线拟合，结果如图 2。

图 2 结果显示，一年级儿童对 0~100 的数字估计更符合线性表征($R^2_{lin}=0.98 > R^2_{log}=0.91$)，对两模型预测值残差的配对 *t* 检验结果显示，线性模型的拟合度显著好于对数模型， $t(29) = -5.14, p<0.001$ 。一年级儿童对 0~1000 的数字估计更符合对数表征

($R^2_{\log}=0.95 > R^2_{\text{lin}}=0.87$), 虽然对两模型预测值残差的配对 t 检验结果显示, 对数模型的拟合度与线性

模型无显著差异, $t(29)=1.66$, $p=0.11$, 但线性模型已经显现出了比对数模型更好的拟合度。

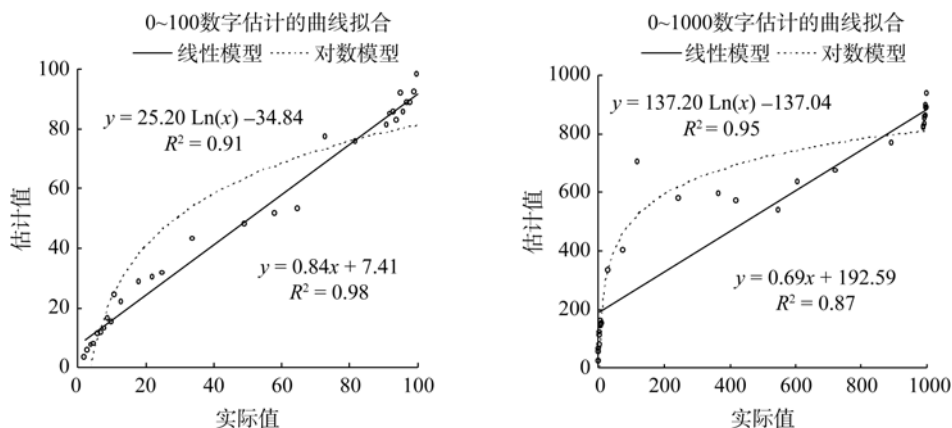


图2 以中位数为因变量的不同数字范围下数字估计的曲线拟合图

以上结果表明, 无论以平均数作为因变量还是以中位数作为因变量, 其最终的曲线拟合都显示了基本一致的结果, 这种结果与周广东等人(2009)的研究结果也是一致的, 那就是一年级儿童对 0~100 的数字估计更好地拟合了线性模型, 而对 0~1000 的数字估计则更好地拟合了对数表征。这种基本一致的结果也进一步说明我们以平均数作为估计值因变量的分析是可靠的。

为进一步验证个体的结果与总体的分析是否一致, 我们分别对每一位被试的估计进行了曲线拟合, 结果显示, 在 0~100 数字估计中有 54% 的儿童采用了线性表征, 只有 4% 的儿童采用了对数表征, 而其它 42% 的儿童在两种表征之间摇摆(线性拟合与对数拟合的预测力无显著差异); 但在 0~1000 的数字估计中采用线性表征的儿童只有 4%, 符合对数表征的儿童占 27%, 而其它 69% 的儿童在两种表征之间摇摆。值得注意的是, 在 0~100 数字估计中采用线性表征的儿童只有 4% 的人在 0~1000 数字估计中仍继续采用线性表征, 其它占总人数 50% 的人则转向了对数表征或在两种表征之间摇摆。这说明, 随着数值范围的增大, 儿童的表征形式开始由精确的线性表征向不精确的对数表征转化。

2.3.3 估计的准确性 将 0~100 和 0~1000 的数平均分成低端、中间和末端数字三段, 求三段数字估计值的绝对误差百分比(即估计值与实际值差的绝对值再除以数字范围), 结果发现, 在 0~100 数字估计中, 低端、中间和末端数字的平均绝对误差百分比分别为 8.07%、6.47% 和 8.77%; 而在 0~1000 数字估计中, 低端、中间和末端数字的平均绝对误差

百分比分别为 19.53%、8.23% 和 16.72%。虽然没有达到统计学上的显著差异, 但在不同的数字背景下儿童对中间数字估计的绝对误差百分比都要明显小于低端与末端数字, 即中间的数字显示了更高的准确性。

综合实验一结果说明, 儿童对低端数字的估计存在心理长度, 即儿童倾向于将低端数字与固定的线段长度应对起来, 且这种对应关系不会随着数字范围的变化而变化。正是因为心理长度的存在, 使得在 0~100 数字估计中采用线性表征的儿童在 0~1000 数字估计中采用了对数表征, 从而使儿童估计的准确性呈现出两头低中间高的分布。但对末端数字估计长度的检验结果没有发现一致的趋势, 因此无法说明儿童在对末端数字的估计中是否采用了倒数的策略。

既然儿童的数字估计中存在低端数字的心理长度, 那么这种心理长度的存在是不是相对稳定还有待进一步考察, 因为实验一结果只能说明儿童对数字范围的变化不敏感, 却不清楚其对线段长度的变化是否敏感。实验二在这样的考虑下拟探讨在相同数字范围下, 变化数字线长度时儿童的估计是否依然存在心理长度, 若存在心理长度, 它将对数字表征产生怎样的影响。

3 实验 2: 不同数字线长度中的心理长度

3.1 研究目的

探讨在相同数字范围不同数字线长度下, 小学一年级儿童对低端数字估计的实际线段长度是否

发生变化,从而进一步探讨儿童进行数字估计时是否存在心理长度,以及心理长度的存在对儿童数字表征的影响。

3.2 研究方法

3.2.1 被试 广州市天河区昌乐小学一年级儿童 30 名,男生 11 名,女生 19 名($M = 7.10$, $SD = 0.61$,在最终的结果分析中删除两名缺失数据太多的被试)。

3.2.2 实验材料 实验材料为一个 31 页纸装订在一起的小册子,小册子的第一页是登记被试基本资料的一个表格,包括性别、年龄及班级,其余 30 页为正式的实验材料,在每一页的中间印有一条长 10cm 或 20cm 的线段,在线段的两端分别标有 0 和 1000,中间无任何标记,在线段中间上方 2cm 处印有一个圆圈,圆圈里印有一个让被试估计的数字,如“9”。除圆圈里的数字不同外,每一页在其它方面均相同,每一小册子上的数字均为随机呈现。

我们在 0~1000 数字范围上选取了 30 个数字,选取较多的低端数字一方面是为了检验低端数字是否存在心理长度,另一方面是为了区分不同的表征模型;而末端数字被较多的选取是为了检验儿童是否会在估计中采用倒数的策略。具体数字如下:

0~1000: 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、33、79、122、246、366、423、548、606、722、894、990、991、992、993、994、995、996、997、998 和 999。

3.2.3 实验程序 每名主试一次负责测试 4~5 名被试,被试之间禁止交流,每名被试一本小册子,在被试填写完基本信息之后,主试人员告诉被试,我们今天做一个有关数字线估计的测试,但这不计入你的学习成绩,在小册子的第二页到最后一页为测试题,在每一页的中间有一条数字线,在数字线的左边标有“0”,右边标有“1000”,如果线段的左

边代表“0”,右边代表“1000”,那么你认为线段上方圆圈里的数字应该在数字线的哪个位置,请你想好之后用笔在线段上画一条竖线来表示出这一数字的位置。实验过程中不允许用直尺量,也无任何反馈。

每名被试都做两种数字线长度的估计,为平衡顺序效应,一半被试先做 10cm 数字线长度的估计,再做 20cm 数字线长度的估计,另一半则相反。对被试的估计结果由一名主试以直尺测量,精确到毫米,然后再转化成估计值。

3.3 结果与分析

3.3.1 儿童在不同数字线长度下对两端数字估计的实际长度的比较 为考察儿童对低端数的估计是否存在心理长度,我们分别计算出被试在 0~1000 范围 10cm 和 20cm 两种数字线长度下估计低端数字(1~10)的实际长度,即从 0 到低端数字被估计位置的距离,对同一低端数字在不同数字线长度下对应的实际线段长度进行配对 t 检验,结果见表 3。

对表 3 结果显示,对于前 10 个数字被估计的实际长度,在两种数字线长度下均无显著差异。说明儿童将低端数字与固定的线段长度对应了起来,在相同数字范围下,即使当数字线长度增长了一倍,儿童仍然不会改变这种对应关系。可见儿童在数形转换的早期的确存在心理长度,他们倾向于将低端数字与固定的线段长度应对起来,且这种应对关系相对稳定,不会随着数字线长度的变化而变化。

另外,为考察儿童对末端数字的估计是否采用了倒数心理长度的策略,我们分别计算出被试在 0~1000 范围 10cm 和 20cm 两种数字线长度下末端数字(990~999)被估计的实际长度,即从末端数字被估计的位置到终点(1000)的距离,对同一数字在不同数字线长度下对应的实际线段长度进行配对 t 检验,结果见表 4。

表 3 不同数字线长度下低端数字估计实际长度的比较

估计数字	实际线段长度(cm)(10cm 数字线)	实际线段长度(cm)(20cm 数字线)	$t(df=27)$	p
1-1	0.30±0.21	0.36±0.54	-0.60	0.557
2-2	0.70±0.46	0.94±0.83	-1.69	0.102
3-3	1.05±0.61	1.20±0.80	-1.45	0.160
4-4	1.24±0.63	1.52±1.39	-1.08	0.289
5-5	1.45±0.80	1.76±1.06	-1.71	0.098
6-6	1.82±1.00	1.82±1.06	0.00	1.000
7-7	2.14±1.40	1.83±1.21	1.24	0.226
8-8	2.25±1.37	1.77±1.10	1.73	0.095
9-9	2.39±1.30	2.09±1.16	1.46	0.157
10-10	2.31±1.54	2.38±1.46	-0.23	0.820

表 4 不同数字线长度下末端数字估计的实际长度比较

估计数字	实际线段长度(cm)(10cm 数字线)	实际线段长度(cm)(20cm 数字线)	$t(df=27)$	p
999-999	0.39±0.20	0.55±0.49	-2.19	0.038
998-998	0.90±0.53	1.44±0.96	-3.26	0.003
997-997	1.27±0.63	2.44±2.23	-3.15	0.004
996-996	1.68±0.99	3.49±3.42	-2.77	0.010
995-995	2.09±1.35	2.52±1.63	-2.63	0.014
994-994	2.53±1.63	3.20±1.86	-2.09	0.046
993-993	2.71±1.53	2.99±2.01	-0.92	0.368
992-992	3.12±1.56	3.45±2.22	-0.93	0.359
991-991	3.27±1.56	3.48±2.22	-0.56	0.581
990-990	3.26±2.23	4.44±2.24	-3.03	0.005

表 4 结果显示, 除 991、992 和 993 这三个数字在不同的数字线长度下被估计的线段长度无显著差异外, 其它 7 个末端数字均在不同的数字线长度下显现出了差异。可见在对末端数字的估计中并未显示出趋势一致的结果, 因此无法确定儿童是否采取倒数的策略来估计末端数字。但由于末端的其它七个数字符合心理长度的预期, 因此也不能排除心

理长度对末端数字的影响。

3.3.2 表征模式

为探讨儿童在数字估计中的表征模式, 我们以呈现的被估计数值为自变量, 以估计值的平均数为因变量, 选取线性模型及对数模型两种表征形式对一年级儿童的数字估计进行曲线拟合, 结果如图 3。

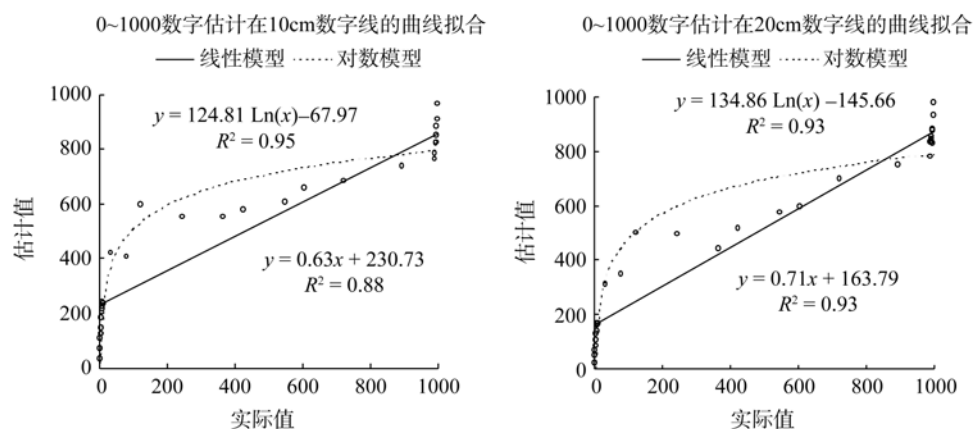


图 3 以平均数为因变量的不同数字线长度下的曲线拟合图

图 3 结果显示, 一年级儿童对 0~1000 范围在 10cm 数字线长度下的数字估计更符合对数表征 ($R^2_{\log}=0.95 > R^2_{\text{lin}}=0.88$)。对两模型预测值残差的配对 t 检验结果显示, 对数模型与线性模型拟合度的差异边缘显著, $t(29)=1.90$, $p=0.068$ 。由此可以看出, 虽然两模型的差异没有达到显著水平, 但一年级儿童在 10cm 数字线长度 0~1000 数字估计中还是对数表征占据明显的优势; 当数字线长度扩大至 20cm 时, 对数表征的优势已荡然无存, 线性表征与对数表征有相同的拟合度 ($R^2_{\text{lin}}=0.93$, $R^2_{\log}=0.93$), 也就是说, 随着数字线长度的增加, 儿童有逐渐由对数表征向线性表征转换的趋势。

为了检验曲线拟合中以平均数和以中位数作

为因变量是否有显著差异, 我们将估计值的因变量变为中位数重新进行了曲线拟合, 结果如图 4。

图 4 结果显示, 在 10cm 数字线长度下, 儿童的估计是对数表征占优势 ($R^2_{\log}=0.95 > R^2_{\text{lin}}=0.87$), 对两模型预测值残差的配对 t 检验结果显示, 对数模型与线性模型拟合度的差异边缘显著, $t(29)=1.78$, $p=0.086$; 但当数字线长度增大至 20cm 时, 线性表征反而显示了更好的拟合度 ($R^2_{\text{lin}}=0.92 > R^2_{\log}=0.91$), 但两种模型拟合的差异不显著, $t(29)=-0.74$, $p=0.467$ 。这种结果与以平均数为估计值因变量的曲线拟合结果非常相似, 那就是, 当数字线长度增大时, 儿童有由对数表征向线性表征转换的趋势。

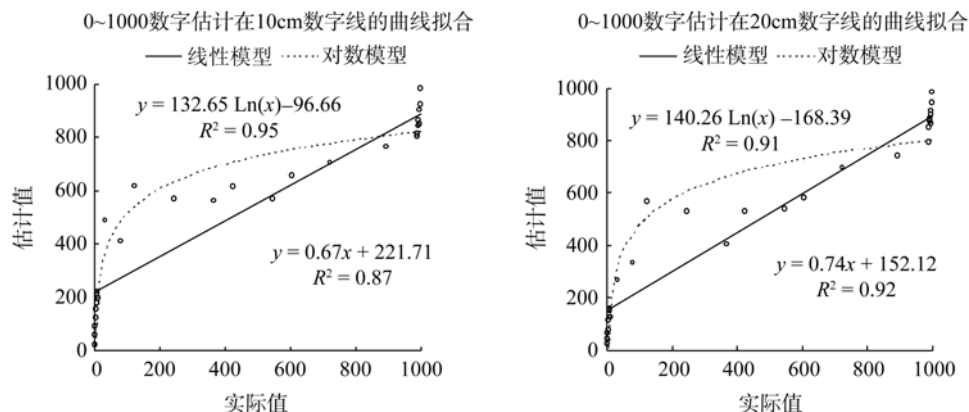


图4 以中位数为因变量的不同数字线长度下的曲线拟合图

以上结果再次表明, 无论以平均数作为因变量还是以中位数作为因变量, 其最终的曲线拟合都显示了基本一致的结果, 这也再次证明以平均数作为估计值因变量的分析是可靠的。

对单个人估计的曲线拟合结果显示, 采用线性表征的儿童在 10cm 数字线长度下占 14.3%, 而在 20cm 数字线长度下增长至 28.6%; 采用对数表征的儿童 10cm 数字线长度下占 39.3%, 而在 20cm 数字线长度下则下降到 14.3%; 在两种表征间摇摆的儿童在两种数字线长度下分别占 46.4% 和 57.1%, 在不同表征间摇摆的儿童中, 有线性表征倾向的儿童在 10cm 数字线长度下占 23.1%, 而在 20cm 数字线长度下则增长至 31.3%, 有对数表征倾向的儿童则由 10cm 数字线长度下的 76.9% 减少至 20cm 数字线长度下的 68.7%。由此可见, 当数字线长度增大时, 采用线性表征的儿童越来越多, 而采用对数表征的儿童越来越少, 即便是那些在不同表征间摇摆的儿童也开始有越来越多的人有选择线性表征的倾向。

3.3.3 估计的准确性 将 0~1000 的数平均分成低端、中间和末端数字三段, 求三段数字在不同数字线长度下估计值的绝对误差百分比, 结果发现, 在 10cm 数字线长度下的估计中, 低端、中间和末端数字的平均绝对误差百分比分别为 21.38%、11.02% 和 14.31%; 而在 20cm 数字线长度下的估计中, 低端、中间和末端数字的平均绝对误差百分比分别为 15.49%、4.97% 和 12.68%。与实验一结果相似, 在不同的数字线长度下儿童对中间数字估计的绝对误差百分比同样小于低端与末端数字, 即中间的数字显示了更高的估计准确性。

综合实验二结果可知, 一年级儿童不仅存在对低端数字的心理长度, 而且这种将低端数字与固定

的线段长度对应起来的关系相对稳定, 不会随着数字线长度的变化而变化。正是因为心理长度的这种存在及稳定性, 使得儿童在对 0~1000 的数字估计在不同的线段长度下呈现出不同的表征形式, 即当线段长度由 10cm 增长至 20cm 时, 儿童在 0~1000 范围的对数表征在逐渐向线性表征转化。也正是因为心理长度的存在, 使得儿童的数字估计在准确性上呈现出两头低中间高的分布。但对末端数字被估计长度的检验结果并未发现较为一致的结果, 因此还无法确定儿童在对末端数字的估计过程中是否采用了倒数的策略。

4 总讨论

是什么原因使得在 0~100 数字估计中采用线性表征的儿童在 0~1000 数字估计中却转向了对数表征? 除了 Siegler (1996) 及 Opfer 和 Siegler (2007) 所认为的任务难度及数经验外, 还有没有其它更深层的原因? 我们从儿童对数字属性认识发展的角度入手, 认为儿童数形转换的早期存在心理长度, 这种心理长度的存在才是导致儿童在不同数字范围中采用不同表征形式的根本原因。

数有称名、等级、等距和等比四大属性, 数字线估计任务中的数字具有等比属性, 但儿童对数的认识是否发展到等比属性还不清楚。数据的称名属性其实类似语言的作用, 所以不是本研究关注的对象。本研究结果表明, 所有儿童都会一致地把较小的数放在数字线的左端, 而把较大的数放在数字线的右端, 这说明一年级的儿童已经理解了数的等级属性。实验一结果表明, 一年级儿童在 0~100 的数字估计中是采用线性表征, 说明他们对数的认识已经达到等距水平, 因为线性表征认为 n 和 $n+1$ 之间有相同的距离, 但一年级儿童在 0~100 上的线性表

征能否说明他们已经理解了数的等比属性了呢？这可从他们在0~1000数字估计中的表现找到答案。实验一结果表明，一年级儿童对0~1000数字估计更倾向于对数表征，而对数表征是一种高估低端数字的表征形式，这说明他们对数的认识还没发展到等比属性的水平，因为他们还不能根据数字范围的变化而相应改变每一数字所占据的线段长度。而心理长度正是儿童对数的认识发展到等距水平时出现的一种独特特点。

实验一二的结果都表明，一年级儿童对相同数字线长度不同数字范围下及相同数字范围不同数字线长度下的低端数字的估计都存在心理长度，他们似乎在运用一种叠加线段长度的方法来估计低端的数字，“1”这一数字对应的线段长度成了估计更高数字时叠加的单位，当然这种叠加过程应该只存在于低端数字，对于更大的数，由于数数的困难及时间的限制而使叠加变得不可能也是可以理解的。值得注意的是，儿童这种心理长度是相对稳定的，即使当数字范围和数字线长度发生较大变化时，低端数字的心理长度也是相对不变的。换句话说，一年级儿童还不能根据数字范围的变化与数字线长度的变化而适应性地改变其估计行为。儿童心理长度的存在也反应了他们对数的理解还停留在等距的水平，还没发展到等比的水平，因此还不能随着数字范围及数字线长度的变化而做出适应性的调整。也正是因为心理长度的存在，使得在0~100上表现出线性表征的儿童，在0~1000范围上却表现为对数表征。同样因为心理长度的存在，使得在数字线长度增长而数字范围不变时，儿童的表征形式有向线性表征转化的趋势。由此可见，Siegler (1996)及Opfer和Siegler (2007)所认为的任务难度及数字经验的缺乏只是儿童在不同数字范围选择不同表征形式的一种表面现象，而心理长度的存在才是造成这种结果的根本原因。

值得注意的是，实验一二的结果均显示，随着数字的增大，儿童估计的线段长度的标准差也在不断增大，Gavin Huntley-Fenner (2001)等也曾发现过类似现象，这可能是由于儿童某种心理特质在发展过程中常常产生质的飞跃，表现出“全或无”的变化，因此，在其发展过渡期的数据常常有较大的变异(标准差)。但随后的分析显示，以中位数为因变量拟合的表征形式与以平均数为因变量的结果是一致的，可见，随着数字增大而标准差有提高的现象并未影响到儿童的数字表征，即以平均数作为儿童

心理长度存在的证据是可靠可信的。

对于末端数字儿童是否会采用倒数心理长度的策略来进行估计？实验一中最末端有两个数字、实验二中末端有七个数字的结果都没有显示出心理长度的存在，但对所考察的实验一中的其它八个末端数字及实验二中的其它三个末端数字则均显示出了心理长度的存在，对于这种趋势不一致的结果还无法做出合理的解释，可能是由于人类从左至右表征数字线的习惯，加之一年级儿童刚开始接受正规的数学学习，有可能还没有发展到使用倒数估计策略的阶段，所以高端数字并未显现出清晰的心理长度。

心理长度的存在不仅影响了儿童对数的表征形式，也影响了儿童数字估计的准确性。实验一二都表明，心理长度的存在使得儿童对两端数字的估计准确性低，而对中间数字的估计准确性高，这是因为儿童对低端数字的估计是一种类似数数式的叠加线段长度的过程，又由于儿童心中对低端数字存在固定的心理长度，从而使得儿童对低端数字的估计不能根据数字范围及数字线长度的变化而灵活变化，因而其估计的准确性也就较低；对中间数字的估计似乎不是在像数数一样的叠加线段长度，而是根据中点来就近判断，国外已有研究证实儿童及成人最常使用的策略是将数字线分段(Siegler & Robinson, 1982)，Siegler和Opfer (2003)的分析也显示，将数字线分段会增加儿童对分段点附近数字估计的准确性，而中点是儿童最容易判断的点，所以对中间数字的估计有较高的准确性可能是儿童先找出中点，然后根据中点进行的就近估计；对末端数字的估计虽然不能证明儿童采用了倒数的策略，但因为本研究所选数字中，末端数字与低端数字在选择密度上相同，且有些数字也符合心理长度的预期，所以也不能完全排除心理长度对末端数字的影响。

总之，心理长度能更全面更深入地解释儿童在不同数字范围下选择不同数字表征的研究结果，心理长度的存在也进一步说明一年级儿童对数的认识与理解还停留在等距水平，还没发展到等比水平，出现这种状况的原因可能是一年级儿童只学习了加减法还没有接触到乘除法的缘故。另外，本研究在证明心理长度的存在时只是选取了较有代表性的数字范围(0~100及0~1000)及数字线长度(实验一为15cm，实验二分别为10cm及20cm)，实验二在变化数字线长度考察心理长度的存在时也只是

选取了更具代表性的 0~1000 的数字范围(为什么这样选择的原因已在引言中交待), 由此得出的结论能否推论到更大的数字范围及更为广阔的数字线长度中去, 依然需要更为深入的研究与探索。但就解决儿童为什么在不同数字范围选择不同数字表征这一根本问题来说, 两个实验的结果已经能够给出较为明确的答案, 而且这种范式与结果也与国际上现行的研究范式与相应的研究结果相吻合。

5 结论

儿童对低端数字的估计存在心理长度, 即他们倾向于将低端数字与固定的线段长度应对起来, 且这种应对关系不会随着数字范围及数字线长度的变化而变化。心理长度的存在是影响儿童在数字线估计任务中对不同数字范围采用不同表征形式的根本原因。心理长度的存在不仅影响了儿童的数字表征形式, 也影响了儿童数字估计的准确性, 使得儿童数字估计的准确性呈现两头低中间高的形式。心理长度是儿童对数概念的认识发展到等距水平时出现的一种独特特点。

致谢: 本实验英文摘要的修改得到了陈琦博士的宝贵意见, 数据的手工测量得到了张利硕士的大力协助, 在此一并表示衷心感谢!

参 考 文 献

- Booth, J. L. (2005). *The importance of an accurate understanding of numerical magnitudes*. Unpublished doctoral dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189–201.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics* (pp.73–76). New York: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., & Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, 320(5880), 1217–1220.
- Dowker, A. (2003). Young children's estimates for addition: The zone of partial knowledge and understanding. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 243–265). Mahwah, NJ: USum Associates, Publishers.
- Huntley-Fenner G. (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': Numerical estimation by 5- to 7- year-olds. *Cognition*, 78(3), B27–40.
- Laski, E. & Siegler, R. S. (2005). *Children's number categories and their understanding of numerical magnitude*. Unpublished manuscript.
- Opfer, J. E. & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, 169–195.
- Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. New York: Oxford University Press.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428–444.
- Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237–243.
- Siegler, R. S., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H. W. Reese & L.P. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behavior: Vol. 16* (pp. 241–312). New York: Academic Press.
- Zhou, G.-D., Mo, L., & Wen H.-B. (2009). The representation model and development of children's numerical estimation. *Psychological Development and Education*, 25(4), 21–29.
- [周广东, 莫雷, 温红博. (2009). 儿童数字估计的表征模式与发展. *心理发展与教育*, 25(4), 21–29.]

Mental Distance in Children's Numerical Estimation

MO Lei¹, ZHOU Guang-Dong¹, WEN Hong-Bo²

(¹ Center for studies of Psychological Application, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(² Division of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract

Numerical estimation is a pervasive process, both in school and in everyday life. Because of the ease of use and good ecological validity, the number line estimation task becomes of the most popular paradigms in the researches on number estimation. In this task, participants are required to estimate the placement of numbers on number lines. Some of the lines start at 0 and end at 100, whereas others have start point of 0 and endpoint of 1000. In both conditions, the lines were unmarked between the start point and endpoint. The second-year primary school students of America and the first-year students of China manifested the same behavioral patterns in the number line estimation tasks: they both depended on linear representations on 0-100 context while depended on log representations on 0-1000 context. In the current study, we aimed at investigating why the junior year primary school students use different types of number representation for different context. We hypothesized that the reason behind is that they trend to map low end number with fixed distance during number estimation, which is defined as *mental distance*.

Two experiments were correspondingly designed to examine whether mental distance exists in children's number estimation. In experiment 1, we examined whether the children used fixed distance to represent low end numbers when the actual length of the number lines were the same while the scale of the numbers varied. Twenty-six first-year primary school students were randomly selected. They were asked to estimate the placement of numbers on 15cm number lines with two contexts: 0-100 or 0-1000. By contrast in experiment 2, we examined whether the children used fixed distance to represent low end numbers when the scale of the numbers were the same while the actual length of the number lines varied. Thirty new first-year students were selected. They were asked to estimate the placement of numbers 0-1000 on number lines with two line lengths: 10cm or 20cm. The low end numbers were oversampled to maximize discriminability of logarithmic and linear functions, and to examine whether mental distance exists.

Paired t-tests of low end numbers showed that there was no significant difference for nine of the ten comparisons on different contexts in experiment 1 and all ten comparisons on different number line lengths in experiment 2. These results suggested that first-year students mapped the low end numbers with fixed distance. Although the context varied from 0-100 to 0-1000, and the lengths of the number lines varied from 10cm to 20cm in the two experiments, the mental distances that low end numbers were mapped to remained constant. Mental distance thus exists in children's number estimation, and it determines the selection of number representations for different number contexts and number line lengths.

The two experiments came to the same conclusion: mental distance in children's number estimation is the possible reason why children depend on different representations on different number contexts. Mental distance is a special characteristic emerging when the development of numerical concept in children has reached the interval level.

Key words mental distance; numerical estimation; linear representation; logarithmic representation