

分数的数量表征*

孙 玉 司继伟 黄碧娟

(山东师范大学心理学院, 济南 250358)

摘 要 分数数量表征已成为当前数学认知研究的重要主题之一。基于该领域近 10 年来的研究发现, 总结了分数数量表征研究的新进展。首先概述分数数量表征的发展, 然后着重介绍分数数量的不同表征方式并系统分析制约数量表征的任务及背景因素。此外, 还深入探究了分数数量表征与整数、小数数量表征的区别与联系。未来研究者应注意在分数数量表征的个体差异、跨文化以及干预等方面加强考察。

关键词 分数; 数量表征; 成分表征; 整体表征

分类号 B849:G44

分数作为一种重要的数字类型, 无论在日常生活还是科学技术中都扮演着非常重要的角色。一般从小学三年级或四年级开始, 儿童开始正式学习分数、理解和使用分数符号。然而, 相对于整数学习, 儿童对分数地掌握显得困难得多, 许多儿童并不能真正理解分数的数量意义。研究发现, 儿童对分数知识地掌握存在很大困难, 甚至许多中学生都不能很好地理解分数(Ni & Zhou, 2005)。有证据表明, 超过 40% 的六年级学生不能按数量大小正确地排列一组分数(Mazzocco & Devlin, 2008)。可以说, 这种分数学习的困难是不同国家儿童所面临的一个普遍问题(Isotani, McLaren, & Altman, 2010; Mazzocco & Devlin, 2008; 刘春晖, 辛自强, 2010)。这一困难甚至可能会一直持续到成年(Bonato, Fabbri, Umiltà, & Zorzi, 2007; Schneider & Siegler, 2010; Stigler, Giwin, & Thompson, 2010)。分数是继整数之后个体掌握的重要数学概念, 整数只能离散地表征数字, 如 1、2、3 等, 而不能表征 1~2 之间的数字, 但分数的表征是有序的、连续的, 如可以表征 1~2 之间的任意数字。因此, 分数比整数有着更高的精确性。分数作为

重要的数学基础课程内容, 分数知识(特别是概念性知识)与之前或之后习得的数学知识密切相关。近年来不少研究证实, 分数的概念性知识和程序性知识与之前习得的整数运算水平都相关(Hecht & Vagi, 2010; 司继伟, 2012)。分数知识(特别是概念性知识)也能预测代数知识(Siegler, Thompson, & Schneider, 2011)、整体数学测试成绩(Bailey, Haord, Nugent, & Geary, 2012; Siegler & Pyke, 2013)以及数学成绩的进步幅度(Bailey et al., 2012)。对数量的表征则是个体获得数概念以及发展更高级数学能力的基础。研究表明, 提高个体的分数数量表征能力能促进对分数知识的理解和掌握(Booth & Newton, 2012)。另外, 分数数量表征的精确性也能够预测分数的运算水平和整体数学能力(Siegler & Pyke, 2013)。因此, 探讨分数的数量表征问题有着重要意义。

研究者已发展了多种实验任务来考察个体的数量表征问题。Siegler 等人(2011)的研究表明适用于研究分数表征的任务有数量比较任务和数量估计任务。在数量比较任务中, 被试需要判断呈现的两个数字中哪个大, 或者比较所呈现的数字与某一固定数字的大小。相比较的两个数字间数值差异越大, 被试的反应越快、正确率越高, 这一现象称为距离效应。一般来说, 该效应会随着年龄的增长而减小。距离效应越小, 说明数量表征越准确。数字线的数量估计任务通常包括数字-位置任务(简称 NP 任务)和位置-数字任务(简称 PN

收稿日期: 2015-07-29

* 国家自然科学基金项目(31371048)资助, 并得到山东省强化建设重点学科“发展与教育心理学”(2010-2015)专项经费资助。

通讯作者: 司继伟, E-mail: sijiwei1974@126.com

任务)两种形式。在 NP 任务中,要求被试判断某个数在一条标有起始点的线段上的位置,而在 PN 任务中,则要求被试估计在一条标有起始点的线段上的某条竖线所代表的数值,被试需将呈现的数字转换成内在的数量表征。因此,数量估计任务能直接地测量个体的数量表征及其发展状况(Siegler & Booth, 2004)。

本文拟从分数数量的发展及不同表征方式、分数数量表征与整数数量表征的区别与联系、分数与小数数量表征的异同方面,对此领域近十年来的主要研究进展进行简要回顾和梳理,并在此基础上,对该领域未来的研究做出展望。

1 分数数量表征的发展

从认知发展的角度看,一些学者认为,人类在婴儿期就能表征两个数量的相对大小。例如, McCrink 和 Wynn (2007)的研究发现,当6个月大的婴儿习惯了用蓝色和黄色豆子表示的非符号比例刺激后,婴儿会用更长的时间注视新异的非符号刺激,从而揭示了婴儿即拥有表征比例的能力(即非符号分数)。婴儿在分辨两个较大整数的数值差异时,往往基于这两个数值之比,也就是说数量表征会受到比例的限制。这种比例限制会随着年龄增长而发生变化,6个月的婴儿只能辨别数量比例为1:2的两组物体,而到10个月时婴儿就能辨别出数量比例为2:3的物体(Xu & Arriaga, 2007)。之后,随着数学符号系统的学习和发展,儿童开始能够表征符号分数。Siegler 等人(2011)采用数字线估计任务和数量比较任务,研究发现八年级学生比六年级学生的分数数量表征更精确,而且八年级学生数字线估计的线性拟合程度也比六年级学生的好。Siegler 和 Pyke (2013)也发现随着年龄增长个体分数数量表征能力增强。国内也有类似的研究发现,卢淳、郭红力、司继伟和孙燕(2014)的一项关于六年级学生和成人的研究发现,在0~1 数字线任务上,儿童的分数估计呈线性表征,且儿童表征的准确性明显低于成人。张丽、卢彩芳和杨新荣(2014)指出,五、六年级儿童对于分数数字线估计的准确性较三、四年级有一个较大的提高,且五、六年级儿童主要采取了线性表征,而三四年级儿童没有明显的线性表征或对数表征的倾向。总体来说,个体的分数数量表征随年龄的增长而不断发展。

数概念是最基本的数学概念,是学习其他数

学概念的基石。曾有研究者探讨过数量表征与数概念间的关系。研究结果发现,通过干预4岁左右幼儿的数概念,可以显著提高幼儿的数字线估计成绩,并表现出线性表征(Ramani & Siegler, 2008; Siegler & Ramani, 2008, 2009)。Laski 和 Siegler (2007)对6岁儿童的分分类知识进行干预训练,结果发现,干预促进了儿童数字线估计的发展。这些研究表明个体的数概念能力可以帮助个体提高数量表征能力。但也有研究者认为,数量表征也会促进个体数概念能力的发展(Nieder, 2005)。徐华(2011)发现儿童的数数能力、数概念水平显著地影响个体的数量表征模式和准确性,个体的数数能力越高、数概念水平越高,其数量表征越准确,越倾向形成线性数量表征。因此,数量表征与数概念之间有密切的联系,可能存在相互影响。个体借助数量表征过程来理解数概念,而数概念的掌握又可以帮助个体进行精确的数量表征(陈英和, 2015)。随着年龄增长,个体分数数量表征能力增强,同时也加强了对分数概念的理解。此外, Stafylidou 和 Vosniadou (2004)曾提出个体对分数概念的理解要经历从低到高的如下三个层次:第一个层次,个体将分数表征为两个相互独立的自然数;第二个层次,个体将分数表征为一个整体的几个部分;第三个层次,个体将分数表征为分子与分母的比。刘春晖和辛自强(2010)的研究发现中国的儿童对分数的理解也符合此发展阶段。随着年级的升高,低层次上人数不断减少,高层次上的人数不断增加,即分数概念发展水平逐步升高。杨伊生和刘儒德(2008)认为分数依然是一个数,不过需要用两个整数的关系来呈现。在个体数概念的发展中,理解分数的概念是个体数概念发展的重要突破,它也使得个体更好地理解数的连续性,从整数到分数是数概念掌握的一次实质性扩展。

虽然,从认知发展的角度看,分数数量表征能力会随着年龄的增长而不断增强,但在此发展过程中,个体在表征分数时存在哪些困难?如何能让个体正确地表征分数?近些年来这些问题一直困扰着研究者,而想要解决这些问题,首先就要清楚人类究竟是以什么方式表征分数的。

2 分数数量表征方式

2.1 成分表征

目前有不少学者认为人们在对分数进行数量

表征时,习惯以离散量(分母或分子)的方式表征分数,即成分表征。Bonato 等人(2007)让被试比较单位分数的大小(如, $1/3$ 和 $1/5$ 哪个更大),结果只发现了分数成分(分子、分母)的距离效应和空间数字反应编码联合效应(简称 SNARC 效应),并由此得出结论,被试只通过分数中的某个整数成分(分子或分母)表征分数,而不能直接表征分数作为实数的值(整体表征)。Thompson 和 Opfer (2010)则发现,成人在估计分数数值的大小时,主要考虑的是分数的分母。比如,让被试判断 $1/150$ 离 $1/1$ 近还是离 $1/1000$ 近时,他们会认为 $1/150$ 离 $1/1$ 更近些,但实际上,虽然 150 离 1 比离 1000 近,但 $1/150$ 离 $1/1000$ 较近,而离 $1/1$ 较远。随后, Liu 等人采用 SNARC 效应、距离效应和大小效应考察了儿童如何表征有共同成分(分子)的分数。实验中要求儿童完成以实数(.2)或分数($1/5$)为参照的分数比较任务。结果表明,分数参照组($1/5$ 为参照),在目标分数和参照分数的分母上,存在显著相反的 SNARC 效应和距离效应;在实数组中,研究者观察到了这三种效应(Liu, Xin, Lin, & Thompson, 2013)。这表明,儿童都使用了心理数字线来表征分数,而且采用的是成分表征。Zhang 等人(2012)在简单和复杂两种条件下考察了成人如何加工有共同分子的分数,在简单条件下,只给被试呈现分数;在复杂条件下,包括随机的呈现分数和小数。两种条件都要求被试估计目标分数是大于还是小于标准分数($1/5$)。行为数据表明,无论是在简单条件还是复杂条件下,被试都采用了成分表征而不是整体表征,ERP 结果表明在简单情况下,被试也进行成分表征(Zhang et al., 2012)。

2.2 整体表征

还有一些研究者认为个体能直接表征分数的值,即整体表征。这一观点也得到了不少研究支持。Schneider 和 Siegler (2010)考察了当比较分数数值时,成人采用成分表征还是整体表征。在 3 个实验中,要求大学生比较分子和分母是一位数和多位数的分数,结果被试表现出了距离效应,这表明成人在比较分数数值时能够对分数进行整体表征。随后, Siegler 等人采用 11~13 岁儿童进行了分数数量研究,也发现了距离效应(Siegler et al., 2011)。辛自强和李丹(2013)则以小学三到六年级学生为被试,采用非符号性分数材料进行了探究,以心理数字线假设为理论基础,分析了被试完成

分数比较任务的 SNARC 效应,结果表明被试能够对分数进行整体表征。然而,上述这些研究结果都属于间接证据。Faulkenberry 和 Pierce (2011)在研究中直接询问被试在分数比较的过程中使用了哪种心理表征,发现虽然被试使用了多种策略来比较分数,包括只知道答案、使用分数的整体知识或基于成分的程序来确定答案。但在所有的策略中,回归分析表明分数的距离效应显著预测了反应时,这说明被试进行了整体表征。这为整体数量表征提供了更为直接的证据。

相关的脑生理机制研究也支持了这个观点。Ischebeck, Schocke 和 Delazer (2009)在功能磁共振成像研究中,考察了分数比较的相关脑区。结果发现,尽管在行为数据中能观察到两种距离效应(分子或分母的距离效应和分数数值的距离效应),但是在顶内沟中只发现了分数数值的距离对激活的调控。这一结果说明虽然被试采用了成分表征,但在人类大脑中分数是以整体的实数值进行表征的,而不是分别对分子和分母的数值进行表征。此外, Jacob 和 Nieder (2009a)的脑成像研究发现,非符号形式的比率可以自动地在人脑中得到表征,并且在顶内沟和前额区域与整数表征有着大量重叠。随后他们又使用了符号分数进行了研究,同样发现在顶内沟与整数表征有重叠。而且由于符号分数有两种形式——数字表示的分数和单词表示的分数,还说明分数的表征不受其呈现形式的影响(Jacob & Nieder, 2009b)。

2.3 混合表征

还有一些研究者认为,人们在对分数进行表征时进行了混合表征,也就是说,人们会根据任务要求,灵活采取成分表征或整体表征。最近几项研究为分数比较任务的心理表征实质提供了混合表征的证据。Meert, Grégoire 和 Noël (2009)认为整体表征与成分表征不是相对立的:个体在完成同一个分数比较任务时,能够同时使用这两种方式表征。随后他们采用启动范式考察了儿童的分数表征,发现同分子分数对(启动刺激,如 $2/5$ 和 $2/3$)中较大分数($2/3$)的反应会延长被试对其分母(目标刺激, 3 和 5)中较大数值(5)的反应时(Meert, Grégoire & Noël, 2010a)。也就是说,当分母值干扰对分数的表征时,被试就会抑制对这个分母的反应。因此,可以认为儿童在对分数进行整体表征的同时也存在成分表征。另外,他们对

成人的研究也获得了同样结果(Meert, Grégoier & Noël, 2010b)。张丽等人通过使用实数值相同但整数构成不同的分数(如 $1/2$ 与 $2/4$)进行考察,发现被试既进行了成分表征,又进行了整体表征,具体使用哪种表征与分数的整数构成密切相关(张丽,辛自强,王琦,李红,2012)。Gabriel, Szűcs 和 Content (2013)的研究也得到了同样的结果,他们采用物理大小比较和数字大小比较两种任务来考察成人对分数数量的表征是整体表征还是成分表征。结果表明,被试在数字匹配任务中进行整体表征,而在物理大小匹配任务中进行成分表征。最近 Faulkenberry, Montgomery 和 Tennes (2015)使用了计算机鼠标跟踪技术对此问题展开探究,分析了当被试将分数与 $1/2$ 进行比较时的手动轨迹。结果发现在得到正确结果前,成分表征和整体表征之间存在竞争,但是成分表征的影响发生得更早些。这些数据说明了在分数比较中,个体采用了成分表征和整体表征,只是两者间存在连续的竞争。

Barraza 等人的最新结果则显示,成分表征在分数对出现后会诱发左侧额顶叶 α 相的去同步化,而整体表征则分别引起额部和中央顶区 θ 波和 γ 带相位同步的增加(Barraza, Gómez, Oyarzún, & Dartnell, 2014)。另外,在 400ms 左右,整体表征比成分表征在右额部唤起更多的负事件相关电位。这种 ERP 活动与 θ 相同步的增加有关。这意味着不同功能的神经网络的出现取决于个体加工分数时所使用的不同表征。在 Zhang 等人(2012)的研究中,虽然 ERP 数据表明,在简单情况下,使用成分表征的个体诱发了 P3 成分。但是,并没有有力的电生理证据表明他们在复杂条件下进行成分表征。

3 分数数量表征的制约因素

根据以上论述,不难发现个体在对分数进行表征时,可能会采用成分表征或整体表征,那么影响个体进行不同表征的因素是什么呢?

首先,刺激呈现方式。Ganor-Stern (2013)的研究发现,如果刺激是相继呈现而非同时呈现的情况下,会减少个体对分数的成分表征和整数偏向。

第二,符号分数复杂程度。如果研究者选用的符号分数相对简单(同分母或同分子分数),被试就可以通过采用成分表征来完成分数比较任务,而完全没有必要把分数转换成实数值。但是,当

分数形式不允许被试采用成分表征时,个体可能就会对分数的实数值进行整体表征。Bonato 等人(2007)使用了 0.2 或 1 与目标分数比较,而 Liu 等人(2013)的研究中则使用了 $1/5$ 或 0.2 与目标分数做比较,两个研究都使用了比较简单的固定分数,结果被试进行了成分表征。然而有些研究则要求被试比较复杂的分数对,这就使得被试不能简单地采用成分表征(如 Meert et al., 2009, 2010a, 2010b; Schneider & Siegler, 2010; Sprute & Temple, 2011)。Schneider 和 Siegler (2010)通过提高符号分数的复杂性排除了被试使用成分表征的可能(例如比较 $4/9$ 和 $3/5$, $20/97$ 和 $3/5$),从而证实了在成分表征无效时,成人能够对分数进行整体表征。也就是说,整体表征只在特殊的条件下才能产生。比如, Sprute 和 Temple (2011)研究表明,当分数对的形式不允许进行成分表征时,个体才会使用整体表征。同样的, Obersteiner, van Dooren, van Hoof 和 Verschaffel (2013)发现,即使是数学专家也只有在绝对必要的情况下(如,当没有共同成分时)才获得分数的整体值。

第三,符号与非符号分数。基于上述分析,可以发现,个体在对符号分数进行表征时,往往可以根据分数的复杂程度而灵活地采用成分表征或整体表征。而研究却发现在非符号的分数比较任务中,个体能排除整数成分的干扰,只表现出对分数值的整体表征。辛自强和李丹(2013)采用非符号性分数材料考察了小学生的分数表征,结果表明被试并没有通过比较分数图片中的阴影面积来判断分数大小,而是对分数进行了整体表征。最近 Matthews 和 Chesney (2015)的实验采用了数量比较任务,实验 1,让被试比较符号分数与由离散但不可数的(在短时间内)点组成的比率分数。实验 2,让被试比较符号分数与由连续的圆圈组成的比率分数。实验 3,让被试比较由点组成的比率分数与由圆圈组成的比率分数。结果在这 3 个实验中都发现被试能够表征非符号比率分数的整体值。

第四,实验任务类型。Gabriel 等人(2013)考察了分数学习开始阶段五、六、七年级的儿童和成人的分数数量表征。实验采用数字比较任务和匹配任务考察整体分数数量的激活。在分数比较任务上发现了整体数量的距离效应,但是在匹配任务上却未发现。这说明实数值的距离效应并不是在所有涉及数量判断的任务中自动激活的。

第五,实验背景。Ganor-Stern, Karasik-Rivkin 和 Tzelgov (2011)考察了单位分数的表征及其受背景影响的程度。通过使用数字比较任务,发现了单位分数整体表征的证据,如果强调分数的即时背景,也就是说当分数对包括单位分数也包括0和1时,分数对比较的语音一致性效应以及分数与0和1比较的距离效应都表明了整体表征。然而,当只是分数间进行比较时,并没有发现整体表征的证据。这些发现表明了分数表征具有背景依赖性。最近的一项研究也表明刺激变化和背景干扰显著地影响了成人和儿童的分数表征。反应时结果表明成人和儿童采用相同的方式加工分数。在任务1(比较了标准分数 $1/5$ 与单位分数)和任务3(刺激混合了非单位分数和小数)中只使用了成分表征,而在任务2(刺激混合了非单位分数)中,使用了两种表征,这说明分数变化影响了分数表征,从而导致成人和儿童进行整体表征(Zhang, Fang, Gabriel, & Szűcs, 2014)。Huber, Moeller 和 Nuerk (2014)采用眼动技术考察了个体对不同类型分数对(有共同成分分数对和无共同成分分数对)的心理表征。结果表明,分数表征不但受分数对类型的影响,也受到实验背景的影响。当呈现不同类型的分数对时,被试会采用不同的表征。如果分数对有共同分子或者分母,被试的注视点会集中于相关成分来表征分数,因此表征速度比没有共同成分的分数对更快。同时,被试也会使得分数表征适应实验背景。当被试知道下一个要出现的分数对类型时,成分表征会占主要地位,被试会转变他们初始注视点位置到相关成分上。而且,在一个组块的试次内,随着实验的进行,被试能够减少对非相关成分的注视次数。

此外,研究还发现,训练个体学习将分数值与一个任意的图形相联系,就能使得个体自动加工新图形的分数值,而如果分数用常规形式表示,则不能进行自动加工(Kallai & Tzelgov, 2012)。这表明,若消除了分数成分的影响,那么个体就能将独立的分数表征在长时记忆中。

4 分数与整数数量表征的区别与联系

分数数量表征与整数数量表征存在明显区别。首先,分数数量表征的发展比整数数量表征的发展晚。Zhou 等人曾发现,一般情况下,儿童从幼儿园大班开始就能将整数表征在心理数字线

上(Zhou et al., 2007)。而汪运起(2013)则发现,中国小学生直到四年级还不能将分数表征在心理数字线上。其次,研究发现,在0~1000数字线的整数估计任务中,美国小学四年级儿童的PAE(percent absolute error, 简称PAE)约为10%~13%,而且线性回归方程对整数估计值变异的解释比例为98%和99%(Booth & Siegler, 2006; Opfer & Siegler, 2007);而汪运起(2013)采用0~1和0~5数字线的数量估计任务考察美国小学四年级学生的分数估计,发现儿童分数估计的PAE为24%,而线性回归方程对分数估计值变异的解释比例仅为53%。因此,分数数量表征不仅在精确性上不及整数数量表征,而且其线性程度也相对较低。

此外,分数与整数数量表征之间是有联系的。Thompson 和 Opfer (2008)曾让一至三年级学生完成数字线估计任务,结果发现儿童整数大小估计的准确性和分数大小估计的准确性呈负相关。而Siegler, Fazio, Bailey 和 Zhou (2013)对五年级儿童的研究却显示二者存在显著正相关。张丽等人(2014)也曾就此问题进行考察,他们以155名三至六年级儿童为被试,采用了0~1的分数数字线估计任务和0~1000的整数数字线估计任务,结果表明整数数量表征和分数数量表征呈显著正相关。显然,Thompson 和 Opfer (2008)与后两者的研究结果存在很大差异,这可能是因为研究所采用的被试年龄不同。但是这3个研究都说明了个体的整数数量表征与分数数量表征确实是存在相关的。相关脑成像研究也支持了这一观点。Jacob 和 Nieder (2009b)发现,不管用数字还是单词表示的分数都能调控人类大脑的额-顶叶皮质的神经元。在BOLD信号适应了常量分数后,当呈现新异刺激时,信号又恢复了,而且是新异分数和适应分数之间数字距离的函数。距离效应并不会因采用数字或单词来呈现分数而发生变化,而且这种效应在顶内沟是最强烈的,这又是整数加工的关键脑区。这些发现说明,人类大脑使用相同的类比数量编码来表征绝对数量和相对数量。

此外,分数数量表征与整数数量表征沿着相似的路径发展。随着年龄的增长,一般情况下,儿童的整数数量表征会由对数表征向线性表征发展并且线性表征会逐渐增强(Opfer & Siegler, 2007; Thompson & Opfer, 2010)。但后来Siegler 等人(2011)并没有发现分数数量表征从对数表征向线性表征

的发展变化,这可能是因为他们的被试是六年级和八年级的学生,而这些被试已经能够对分数的数量进行线性表征。

Siegler 等人(2011, 2013)进一步提出了数量发展的整合理论,不但强调了分数和整数知识的区别,还强调了二者发展的联系。该理论认为所有的实数都能在数字线上排序且每个实数都有其特定的位置,也就是说,所有实数都能通过数字线联系起来。Ganor-Stern (2012)发现负数和单位分数具有不同的表征方式。当正数(使用的正数为整数)与单位分数进行比较时发现了距离效应,而当与负数进行比较时没有发现距离效应,这说明正数与单位分数而非负数一起表征在心理数字线上。Ganor-Stern (2013)的研究显示,个体能将分数和小数像整数一样表征在心理数字线上。最近,Matthews 和 Chesney (2015)的研究表明,人类可能拥有本能的感知基础来获得抽象的分数数量,而且从知觉上获得的数量可以很容易地与符号表征的分数相比较。也就是说,人类可以通过感知路线加工非符号比率数量,不依赖于有意识的符号运算法则,这类似于整数数量的加工。这也暗示分数在某种意义上可能是与整数一样的自然数,从而支持了数量发展整合理论。

5 分数与小数数量表征的异同

分数和小数是比率数字的两种不同表示形式,但又是有关联的,比如分数和小数之间能相互转换。那么分数和小数在数量表征上有着怎样的异同呢?首先看两者的不同点,小数数量表征的发展要早于分数,而且小数的数量表征也比分数的数量表征更精确(汪运起, 2013)。此外,分数和小数有独立的实数表征机制(王琦, 2012)。先前的研究表明,人们在加工分数时会分为两步,首先将分数置于小于 1 的数字线位置上,然后再对分数做进一步的精确数量表征加工(Kallai & Tzelgov, 2012)。但对于小数,只要个体在知觉上辨识出小数符号,便可以直接判断出其数量的大小(Cohen, 2010)。

虽然分数与小数的数量表征间存在区别,但是也有相似之处。首先,在分数和小数的数量比较任务中,被试的速度和正确率都随年龄的增长而提高,并且分数和小数数量表征的线性程度也随年龄的增长逐渐提高(汪运起, 2013)。其次,分

数和小数都能进行成分表征和整体表征,而且都可以根据不同的任务选择进行不同的表征(Meert et al., 2009; Cohen, 2010)。此外,分数和小数的数量表征都存在符号特异性和符号非特异性的双重特性(王琦, 2012)。陈敏、王琦和张丽(2013)通过采用数量比较的分类范式测定了 14 名大学生完成任务时的事件相关电位,表明分数和小数的特异性加工主要源于知觉辨别、符号意义的提取、数量大小表征和分类反应关联阶段的差异。任务范式和意识加工水平会影响数量的符号特异性表征,并且在不同意识水平下,分数和小数数量表征发生改变。另外,单纯和混合两种情境对分数和小数这两种符号数字的特异性加工也有不同影响,分数受情境影响显著,而小数不受情境影响。最近有研究采用 ERP 技术探究了分数和小数加工的共同点和不同点(Zhang, Wang, Lin, Ding, & Zhou, 2013)。13 名被试在两种条件下完成了数量匹配任务。在分数条件下,要求判断非符号分数是否与分数数量匹配;在小数条件下,判断非符号分数与小数是否匹配。行为结果表明,条件和数量距离主效应显著,但是二者之间没有显著的交互作用。电生理数据表明,相比非符号分数与小数比较,当非符号分数与分数比较时,显示出了更大的 N1 和 P3 振幅。这个发现表明,在两种条件下,非符号分数的视觉识别是不同的。对于符号分数,在 N1 和 P3 成分上有条件效应,这说明有刺激特异性的视觉识别加工。在两种条件下的 P2, N3 和 P3 成分上都发现了数量距离效应。然而,两种条件下的距离效应是不同的,表明分数和小数刺激特异性语音加工。

6 小结与展望

总体来说,随着社会认知神经科学的发展,不管在行为层面还是脑神经基础层面,人们对个体分数数量表征的理解取得了一定进展,但仍存在较大的探索空间。

首先,关于分数数量表征个体差异的研究还较少。现有研究证据表明个体差异对分数数量表征是有影响的。比如, Faulkenberry (2011)通过分数比较的方法发现,那些高数学焦虑的个体或日常经常使用计算器的个体,分数的数字距离效应比低数学焦虑或较少使用计算器的个体更小,也就是说,这些个体的分数数量表征发展较差。

Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes 和 Dartnel (2015) 最新研究探究了儿童的一般数学成绩、分数比较能力和抑制间的关系, 结果表明, 抑制控制与分数比较的正确性有很强的相关, 在分数比较上, 个体必须抑制由那些组成分数的自然数提供的潜在误导信息(如, $2/3 > 4/7$, 尽管 $2 < 4$ 且 $3 < 7$), 但这种相关要受到一般数学成绩的调节。而与视觉启动相关的加工过程, 预测了儿童可能通过比较分数成分(分子或分母)来解决分数比较问题, 而且这种相关并没有受一般数学成绩的调节。这说明抑制和分数比较精确性的关系与启动和分数比较精确性的关系是由不同原因造成的。因此, 关于分数表征的个体差异还需进一步深化。

第二, 关于分数数量表征的跨文化研究尚少。关于数学能力国际差异的跨文化比较, 先前研究主要集中于整数方面, 而最近也出现了对分数的研究。如汪运起(2013)发现, 中美儿童在分数表征的线性程度方面存在显著差异, 美国儿童的分数表征水平显著比中国同龄儿童高。而最新研究表明, 中国六年级和八年级学生在分数数字线估计、分数数量比较以及分数算术任务上, 其精确性都要比美国同龄儿童高很多(Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015)。那么造成这种相反研究结果的原因是什么呢? 显然这一问题还有待进一步探究。此外, 这两个研究都表明中美儿童在分数理解和分数数量表征上存在差异, 造成这一现象的潜在因素很多, 如文化、教师(培训、经验、知识数量等)、学校数学教学质量、课程标准、教学进度、教学方法、教学工具、分数的使用频率或语言等方面的差异。但目前还没有研究考察究竟是哪些因素导致了中美儿童在分数数量表征方面的差异。

最后, 未来应进一步将分数数量表征的相关研究成果应用到分数教学和学习活动中, 提高研究成果的实用价值。研究表明, 分数的数量表征会随年龄的增长而发展(Siegler & Ramani, 2009; Wang, Geng, Hu, Du, & Chen, 2013; 卢淳等, 2014)。现有的研究资料还表明, 适当的短期训练甚至反馈也能提高分数的数量表征。如郭红力(2010)就对被试进行了反馈实验, 发现反馈后儿童分数估计结果的准确性要高于反馈前, 这意味着分数估算成绩通过一定的反馈训练会有所提高。汪运起(2013)曾将四年级和五年级的被试分别随机分配

到三个组(数字线训练组、圆训练组、课本阅读组), 结果发现数字线训练比其他两种训练能更好地提高儿童对分数数量的表征水平, 这种训练的效果在数量估计和数量比较两种任务中都能体现出来。辛自强和刘春晖(2013)通过数字线任务和离散物体任务对拥有错误整数偏向的儿童进行干预, 再施测分数比较任务, 结果表明, 离散物体组儿童虽然在干预中表现较好, 而且在分数比较任务中得分也显著高于数字线组儿童, 但反应时要慢于数字线组儿童。与此同时, 国外研究者也进行了相似的干预和训练, Fuchs 及其同事(2013)对具有分数理解和算术困难的四年级学生进行了 12 周的干预, 一周 3 次, 一次 30 分钟, 结果证明强调分数数字线理解的干预比传统的强调部分—整体分数理解的教学更有效。这些研究结果都证明, 短期干预确实可以提高个体分数数量表征的水平, 但目前的干预和训练方法比较单一, 而且国内外相关的研究也比较少。未来应关注儿童对分数数量表征的干预和训练, 以提高其整体数学成绩。

参考文献

- 陈敏, 王琦, 张丽. (2013). 情境对分数和小数影响的 ERP 研究. *心理研究*, 6(3), 29-38.
- 陈英和. (2015). 儿童数量表征与数概念的发展特点及机制. *心理发展与教育*, 31(1), 21-28.
- 郭红力. (2010). 小学高年级儿童的分数数量表征 (硕士学位论文). 山东师范大学, 济南.
- 刘春晖, 辛自强. (2010). 五~八年级学生分数概念的发展. *数学教育学报*, 9(5), 59-63.
- 卢淳, 郭红力, 司继伟, 孙燕. (2014). 不同数字线下儿童与成人分数估计的表征模式. *心理发展与教育*, 30(5), 449-456.
- 司继伟. (2012). 不同数感水平儿童的数学估计: 锚定方式的影响. *山东师范大学学报(人文社会科学版)*, 57(3), 92-101.
- 汪运起. (2013). *儿童的分数和小数数量表征及其发展* (博士学位论文). 浙江大学, 杭州.
- 王琦. (2012). *分数和小数数量表征的符号特异性和非特异性* (硕士学位论文). 西南大学, 重庆.
- 辛自强, 李丹. (2013). 小学生在非符号材料上的分数表征方式. *心理科学*, 36(2), 364-371.
- 辛自强, 刘春晖. (2013). 数字线和离散物体任务训练对儿童整数偏向的影响. *心理科学*, 36(1), 78-85.
- 徐华. (2011). *幼儿线性数量表征的形成及其机制* (博士学位论文). 北京师范大学, 北京.
- 杨伊生, 刘儒德. (2008). 儿童分数概念发展研究综述. *内蒙古师范大学学报(教育科学版)*, 21(6), 130-134.
- 张丽, 卢彩芳, 杨新荣. (2014). 3~6 年级儿童整数数量表

- 征与分数数量表征的关系. *心理发展与教育*, 30(1), 1-8.
- 张丽, 辛自强, 王琦, 李红. (2012). 整数构成对分数加工的影响. *心理发展与教育*, 28(1), 31-38.
- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447-455.
- Barraza, P., Gómez, D. M., Oyarzún, F., & Dartnell, P. (2014). Long-distance neural synchrony correlates with processing strategies to compare fractions. *Neuroscience Letters*, 567, 40-44.
- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33(6), 1410-1419.
- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253.
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 42(1), 189-201.
- Cohen, D. J. (2010). Evidence for direct retrieval of relative quantity information in a quantity judgment task: Decimals, integers, and the role of physical similarity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 36(6), 1389-1398.
- Faulkenberry, T. J. (2011). Individual differences in mental representations of fraction magnitude. In S. Reeder (Ed.) *Proceedings of the 38th annual meeting of the research council on mathematics learning* (pp. 136-143). Cincinnati, OH: RCML.
- Faulkenberry, T. J., Montgomery, S. A., & Tennes, S. A. N. (2015). Response trajectories reveal the temporal dynamics of fraction representations. *Acta Psychologica*, 159, 100-107.
- Faulkenberry, T. J., & Pierce, B. H. (2011). Mental representations in fraction comparison. *Experimental Psychology*, 58(6), 480-489.
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., ... Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 683-700.
- Gabriel, F. C., Szűcs, D., & Content, A. (2013). The mental representations of fractions: Adults' same-different judgments. *Frontiers in Psychology*, 4, 385.
- Ganor-Stern, D. (2012). Fractions but not negative numbers are represented on the mental number line. *Acta Psychologica*, 139(2), 350-357.
- Ganor-Stern, D. (2013). Are 1/2 and 0.5 represented in the same way? *Acta Psychologica*, 142(3), 299-307.
- Ganor-Stern, D., Karasik-Rivkin, I., & Tzelgov, J. (2011). Holistic representation of unit fractions. *Experimental Psychology*, 58(3), 201-206.
- Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., & Dartnell, P. (2015). The effect of inhibitory control on general mathematics achievement and fraction comparison in middle school children. *ZDM*, 47, 801-811.
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102(4), 843-859.
- Huber, S., Moeller, K., & Nuerk, H. C. (2014). Adaptive processing of fractions: Evidence from eye-tracking. *Acta Psychologica*, 148, 37-48.
- Ischebeck, A., Schocke, M., & Delazer, M. (2009). The processing and representation of fractions within the brain: An fMRI investigation. *NeuroImage*, 47(1), 403-413.
- Isotani, S., McLaren, B. M., & Altaian, M. (2010). Towards intelligent tutoring with erroneous examples: A taxonomy of decimal misconceptions. In V. Aleven, J. Kay, & J. Mostow (Eds.), *Proceedings of the 10th international conference on intelligent tutoring systems* (Vol. 6095, pp. 346-348). Berlin Heidelberg: Springer.
- Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009a). Tuning to non-symbolic proportions in the human frontoparietal cortex. *European Journal of Neuroscience*, 30(7), 1432-1442.
- Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009b). Notation-independent representation of fractions in the human parietal cortex. *Journal of Neuroscience*, 29(14), 4652-4657.
- Kallai, A. Y., & Tzelgov, J. (2012). When meaningful components interrupt the processing of the whole: The case of fractions. *Acta Psychologica*, 139, 358-369.
- Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, 75(6), 1723-1743.
- Liu, C. H., Xin, Z. Q., Lin, C. D., & Thompson, C. A. (2013). Children's mental representation when comparing fractions with common numerators. *Educational Psychology*, 33(2), 175-191.
- Matthews, P. G., & Chesney, D. L. (2015). Fractions as percepts? Exploring cross-format distance effects for fractional magnitudes. *Cognitive Psychology*, 78, 28-56.
- Mazzocco, M. M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11(5), 681-691.
- McCrink, K., & Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science*, 18(8), 740-745.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of*

- Experimental Psychology*, 62(8), 1598–1616.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010a). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(3), 244–259.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010b). Comparing $5/7$ and $2/9$: Adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica*, 135(3), 284–292.
- Ni, Y. J., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Nieder, A. (2005). Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence. *Nature Reviews Neuroscience*, 6(3), 177–190.
- Obersteiner, A., van Dooren, W., van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64–72.
- Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55(3), 169–195.
- Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(2), 375–394.
- Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36(5), 1227–1238.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428–444.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. L. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13–19.
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004.
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, 11(5), 655–661.
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 545–560.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.
- Sprute, L., & Temple, E. (2011). Representations of fractions: Evidence for accessing the whole magnitude in adults. *Mind, Brain, and Education*, 5(1), 42–47.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503–518.
- Stigler, J. W., Giwin, K. B., & Thompson, B. J. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics? *Mathematic Educator*, 1(3), 4–16.
- Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2008). Costs and benefits of representational change: Effects of context on age and sex differences in symbolic magnitude estimate. *Journal of Experimental Child Psychology*, 101(1), 20–51.
- Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effect of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development*, 81(6), 1768–1786.
- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. Q., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5–13.
- Wang, Y. Q., Geng, F. J., Hu, Y. Z., Du, F. L., & Chen, F. Y. (2013). Numerical processing efficiency improved in experienced mental abacus children. *Cognition*, 127(2), 149–158.
- Xu, F., & Arriaga, R. I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(1), 103–108.
- Zhang, L., Fang, Q. C., Gabriel, F. C., & Szűcs, D. (2014). The componential processing of fractions in adults and children: Effects of stimuli variability and contextual interference. *Frontiers in Psychology*, 5, 981.
- Zhang, L., Wang, Q., Lin, C. D., Ding, C., & Zhou, X. L. (2013). An ERP study of the processing of common and decimal fractions: How different they are. *PLoS One*, 8(7), e69487.
- Zhang, L., Xin, Z. Q., Li, F. H., Wang, Q., Ding, C., & Li, H. (2012). An ERP study on the processing of common fractions. *Experimental Brain Research*, 217(1), 25–34.
- Zhou, X. L., Chen, Y., Chen, C. S., Jiang, T., Zhang, H. C., & Dong, Q. (2007). Chinese kindergartners' automatic processing of numerical magnitude in stroop-like tasks. *Memory & Cognition*, 35(3), 464–470.

Magnitude representation of fraction

SUN Yu; SI Jiwei; HUANG Bijuan

(School of Psychology, Shandong Normal University, Jinan 250358, China)

Abstract: Magnitude representation of fraction has become one of key issues in contemporary mathematical cognition field. Based on the latest ten-year studies, some new developments of investigations in fraction magnitude representation were reviewed. First, it was summarized how magnitude representation of fraction developed. Then the different fraction magnitude representations were introduced, and some tasks and background factors that affected magnitude representation of fraction were systematically analyzed. In addition, the relationships and differences between magnitude representation of fraction and whole number or decimal fraction were also explored. Future researchers should pay more attentions to individual differences in fraction representation, and cross-cultural investigations and other intervention aspects to strengthen the understandings on fraction representation.

Key words: fraction; magnitude representation; componential representation; holistic representation