

问题表征方式与数学问题解决的研究

胥兴春 刘电芝

(西南师范大学教育科学学院, 重庆 400715)

摘 要 阐述了问题表征在数学问题解决中的作用;重点探讨了抽象表征、原理表征、图式表征等不同表征方式与数学问题解决的关系;最后提出通过选择与转换两种策略来寻求适宜的问题表征方式。

关键词 问题表征, 数学问题解决, 表征方式, 选择, 转换。

分类号 B842.5

1 引言

近 20 年来,表征(representation)问题一直颇受关注,成为研究人类认知过程的中心课题之一。但与此同时,人们对表征是否存在,以及表征的作用、形式、结构、特征等方面的争议也从来没有间断过。尽管如此,表征还是在问题解决领域的研究中,尤其是在数学、物理、化学、语文等学科领域的研究中取得了不少的成果。研究表明,正确的表征是解决问题的必要前提,在错误的或者不完整的问题空间中进行搜索,不可能求得问题的正确解。^[1]问题表征是问题解决认知活动中的一个中心环节,它说明问题在头脑里是如何呈现、如何表现出来的。而且许多认知心理学家把信息在头脑中的呈现统称为表征。因此,问题表征能力和问题表征质量也就成为影响数学问题解决的重要因素。本文围绕问题表征在数学问题解决过程中所起的作用,不同的表征方式与数学问题解决的关系,以及问题表征方式的选择与转换等方面进行了探讨。

2 问题表征在数学问题解决中的作用

问题表征是指根据问题所提供的信息和自身已有的知识经验,发现问题的结构,构建自己的问题空间的过程,也是把外部的物理刺激转变为内部心理符号的过程。问题表征既是一种过程,即对问题的理解和内化;也是问题理解的一种结果,即问题在头脑中的呈现方式。问题表征质量的高低将会直接影响到问题的解决。Krutetskii^[2]和 Usiskin^[3]研究认为,在许多数学问题中,视觉表征能够加强解题者对问题的知觉性理解,因而它对数学问题的成功解决就显得非常重要;Marr 认为,在对几何物体和空间图形进行识别和理解时,以指定物体的方向、大小、亮度和位置等表征元(token)为基础;李文馥^[4]和 Battista^[5]认为数学关系的空间表象操作能力有助于数学问题解决,它与数学成绩成正相关;徐凡等人的研究^[6]也证实了小学生空间表征与解决几何问题的能力有很高的相关性。Hegarty, Mayer, Monk^[7]的研究则发现,成功的问题解决者倾向于在头脑中建立一个有意义的问题表征,而不成功的问题解决

者却把主要的精力集中在问题的关键词和具体的数字上了,从而影响到问题的成功解决;纪桂萍等^[8]认为平时成绩好的学生在解决数学问题时,会在头脑中出现一些相应的形象,而平时成绩较差的学生则大多数不能建立这种关系;Anand 和 Ross^[9]则发现学生解答应用题的错误原因主要是对问题结构的错误表征。Simon 研究^[10]发现,有时我们按照常规方式表征的问题难以求解,但若换了一个角度来表征同一个问题,问题就迎刃而解了。这些研究都清楚地表明了问题表征在数学问题解决中的重要作用。

3 不同的问题表征方式与数学问题解决

人脑的表征系统中存在着许多不同的表征方式,而每一种表征方式又可以自成体系,组成一个表征子系统。比如,概念表征系统、命题表征系统、表象表征系统、图式表征系统等等。但是否每一种表征方式都能促进问题的成功解决?不同的表征方式与数学问题解决之间的关系又如何?近年来不少学者对此进行了较为深入而系统的研究。

3.1 语言化表征、形象化表征及混合型表征

Krutetskii^[2]通过研究学生在解题过程的出声思维和解题之后的报告认为,按照加工数学信息方式的不同,可以把学生分为三种类型:第一类,语言化型(verbalizers),解题时喜欢用语言逻辑而非形象进行加工;第二类,形象化型(visualizers),喜欢用视觉形象而非逻辑语言来理解问题;第三类,混合型(mixers),他们解题时没有一种固定的倾向。按照Krutetskii的模型,Moses、Suwarsono 和 Presmeg 研究后则认为,每个个体都是处于使用视觉形象这一连续统一体(continuum)上的某一点,而且视觉形象表征的广泛运用并不一定能提高解题成绩,有时甚至还可能会阻碍问题的成功解决。Lean 与 Clements 研究^[11]也发现,数学形象与空间能力、数学操作之间呈负相关,在数学和空间能力的测验上,词语化者要优于形象化者。尽管空间能力与数学成绩之间成正相关,但信息加工的视觉倾向与数学操作和空间能力测验都不相关。也就是说,并不是所有的作业,形象化表征都优于其他类型的表征。因此,Hegarty 和 Kozhevnikov^[12]对这种划分方法的有用性提出了质疑,认为由于以视觉型和语言型划来分学生的表征方式,显得太过一般化,不能表明表征与数学问题解决之间的确切关系。而且后来这方面的相关研究也并不多见。

3.2 形象表征与抽象表征

在研究中,纪桂萍等^[8]把数学问题解决中的心理表征分为形象表征(visual representation)和抽象表征(abstract representation)两种。形象表征包括操作材料、图画模式以及出声言语或书面符号的方式。可以看出,这里的形象表征与Krutetskii所提出的形象化表征有所不同。抽象表征则是指以一种比较抽象方式,如以概念、定理、命题等对数学问题进行表征,它的特点就是将问题表征为一组符号,有时又被称为命题表征(propositional representation)。形象表征和抽象表征共同构成一个完整的表征系统。研究发现,在问题解决过程中两类表征系统之间或其内部是相互影响和转换的。其中,形象表征有助于减少记忆负荷或提高贮存能力,以更具操作性和简化复杂关系的形式对信息进行编码和处理。借助一

一个好的形象表征,学生可以形成一个有效的抽象表征,从而更好地了解问题解决的实质和关键,然后再借助形象表征的各种方式,达到对问题的解决。^[6]由于低年级学生尤其是小学生的思维具有形象性的特点,他们更多地依靠具体形象的思维表征方式,否则很难解决问题。而抽象数学概念和关系往往需要借助于具体的符号和图表等才能被理解,从而形成抽象表征。由此可见,形象表征往往是抽象表征的基础,它与抽象表征方式并不是截然分开的。两种不同的表征方式在中学生及成人数学问题解决中的具体作用还有待进一步研究。

3.3 原理表征与综合表征

Dixon 和 Moore^[13]在研究直觉表征(intuitive representation)对问题解决中数学策略选择的影响时,提出了两种表征方式:原理表征(principle representation)和综合表征(integrated representation)。他们认为,原理表征就是指按照一套特殊原理来表征问题的领域,其中每个原理都表明一套模糊的潜在答案(a fuzzy set of potential answers)。这些原理又分为内部问题原理(within-problem principles)和比较问题原理(compare-problem principles)。内部问题原理主要是评价问题的范围以及上下关系等,比较问题原理则是用来比较两个问题的交叉关系和风格。综合表征则是指以一种整体的方式表征某个领域中问题的关系。综合表征方式把评价功能(valuation function)和反应功能(response function)连成一体;在问题解决中,个体是通过“心理模型”(mental model)来表征问题情形(situation)中变量之间的关系。Dixon 和 Moore 在比较研究这两种表征方式后认为,个体在解决问题时,主要是通过外显地表征和使用原理,来评价和选择数学策略。因而数学原理的掌握和使用是学生选择数学策略的前提,原理表征方式能够促进学生对策略的理解和加工。但 Dixon 和 Moore 主要研究的是大学生解决问题时的直觉表征,而对于中小学生学习解决问题时是否也存在类似的表征方式,以及两种表征方式适用的任务领域等问题还需要作进一步探讨。

3.4 图式表征与图形表征

视觉-空间表征是研究中的热点问题。一些研究^[14-16]发现,视觉-空间表征(visual-spatial representation)并不是一个不可分割的整体,而是由相对独立的视觉和空间成分组成的。对于表征类型的划分,Hegarty 与 Kozhevnikov 认为,学生在解题过程中存在着两种不同的视觉-空间表征类型:图式表征(schematic representation)和图片表征(pictorial representation),图式表征是指对问题的空间关系进行编码的方式;而图片表征则是指对问题的形象的外表进行编码的方式。采用图式表征方式的学生倾向于对问题的空间关系和空间转化进行表征,涉及问题的主要信息而遗漏多余细节,图式表征与人的空间能力紧密联系。而采用图片表征的学生在表征问题时喜欢构建生动的、细微的视觉图象,图片表征主要与人的视觉形象有关。视觉-空间表征方式对数学问题解决究竟有何作用呢?

Hegarty 等人研究发现,无论是学生自我报告还是结果证实都显示出有超过一半的学生使用了视觉-空间策略来表征问题,其中使用图片表征的学生的比例要高出使用图式表征的学生;而且,在数学问题解决中,视觉-空间策略的使用与问题的成功解决之间并没有显著的相关。这也从另一个角度证实了 Mose 等人的研究结论。但 Hegarty 等人研究还发现,两

种不同类型的视觉—空间表征方式会导致截然不同的结果：图式空间表征有利于数学问题的解决，与数学问题解决成正相关；而图片表征的使用却不能导致问题的成功解决，与数学问题的正确解决没有必然的联系。在分析这种现象时，他们认为主要是因为使用图式表征的学生是对问题的空间关系进行编码和表征；而使用图片表征的学生则囿于问题的表面特征，如形状、颜色和明亮等细节部分，从而使注意力偏离问题的主要元素。而且 Greeno 和 Carpenter 也认为，根据数学问题的类型，儿童能形成相应的变化图式、合并图式和比较图式；刘凡^[17]，刘广珠^[18]等据此进行的实验研究也揭示了不同图式表征方式在问题解决中的不同作用。新近，何海东等人^[19]的研究也表明，如果能够识别（表征）构成物体的部件以及确定其间的空间关系，就可以实现对物体的整体识别和理解。因而，从某种意义上说，图式表征是解决数学问题的一种比较有效的方式。

4 表征方式的选择与转换

一般情况下，人们总是用给定的表征形式解决问题，如问题以文字形式呈现，解题者往往也倾向于用言语方式解决问题^[20]。但当给定的表征方式不利于问题解决时，解题者就需要寻求新的、更为有效的表征方式。新的表征方式主要是通过选择（selecting）与转换（transferring）来实现的。

问题表征方式具有多样性。Markman 与 Dietrich^[21]研究认为，不同类型的问题表征方式适合于不同的心理加工过程。适当的表征把对问题解决最有价值的重要成分和结构关系放到一个突出的位置上，问题的适当表征与问题的成功解决之间存在正相关^[22]。因此，能否选择一种适宜的表征方式就成为影响问题解决的重要因素。而 Greeno^[23]则认为选择不同的表征反映了问题解决者对问题的不同理解和思考。Novick, Hurley 和 Francis^[24]研究发现，解题者依靠抽象的图式知识，比依靠单一的、详实的例题更能选择恰当的表征形式。表征选择是一个信息分析、关系提炼的认知过程；而表征转换则是对已有的信息数据的再加工、精加工的认知加工过程^[20]。相对于表征选择而言，表征转换显得更为复杂一些。Novick 曾提出一个表征转换模型（a model of representation transfer），这个模型强调能否成功选择和建构一种适当的表征方式取决于解决问题的综合知识与以往运用某种表征的经验。解题者首先要对各种表征方式的具体适用性有一个清晰的认识，才能选择出有效的表征方式，或者转换为适宜的表征方式。一个适宜的问题表征一般应该满足三个条件：（1）表征与问题的真实结构相对应；（2）表征中的各个问题成分被适当的结合在一起；（3）表征结合了问题解决者的其它知识^[25]。另外，在问题表征过程中，如果出现信息遗漏、信息误解或隐喻干扰，则有可能导致建构出错误的或者不完整的问题空间^[1]。因此，选择与转换（建构）表征方式是提高问题解决效率的两种有效的策略。

5 小结

关于不同表征方式对数学问题解决的影响，不同研究者的结论各不相同；而且同一表征方式对问题解决的影响，不同研究者所持的观点也不尽相同。这可能与他们所使用的材料、

对表征的理解以及研究的视角不同有关, 因此研究尚需进一步深入。

我们从近期有关问题表征的研究发现, 图式表征的研究逐渐已为人们关注的热点。一些研究^[12,17,18]表明, 图式表征是一种比较有效的数学问题表征方式, 对问题解决具有重要的作用。他们还区分了不同类型的图式表征方式, 并探讨了这些图式表征方式在问题解决中的作用。而且, 在认知心理学家眼里, 顿悟式的问题解决其实就是激活了头脑中的一个适当的图式, 用已有的图式表征当前的问题, 因而这是一种图式—驱动问题的解决。

问题表征对于问题解决来说具有极其重要的作用, 问题解决的第一步就是对问题进行表征, 确定问题究竟是什么。一旦采取了合理的方式表征问题, 就形成了一个良好的问题空间, 问题的解决就开了一个好头。如果问题得不到适宜的表征, 那么问题就难以解决或无法解决^[26]。刘凡、张庆林^[27]等人的研究表明, 问题解决能力较差的学生, 对数学问题难以建立起有效的表征, 从而影响了问题的成功解决。而且研究还发现, 表征正确或不完全正确, 其解题结果都正确; 而表征错误, 其结果必然错误。通过教学训练, 学生能迅速地将问题表征转换成正规数学表征, 从而使他们的数学能力发生质的变化^[18]。因此, 在今后的研究中, 问题表征应该成为问题解决研究的重点; 在教学中, 应加强学生掌握有效问题表征的训练, 以提高他们的解题能力和水平。

参考文献

- [1] 傅小兰, 何海东. 问题表征过程的一项研究. 心理学报, 1995, 27(2): 205~209
- [2] Krutetskii V A. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. University of Chicago Press, 1976. 105~182
- [3] Usiskin Z. Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In: Lindquist M M, Shulte A P ed. Learning and teaching geometry K-12. Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics, 1987. 17~31
- [4] 李文腹. 8—13 岁儿童空间表象发展的研究. 心理学报, 1987, 19(1): 10~17
- [5] Battista M T. Spatial visualization and gender differences in high school geometry. Journal of Research in Mathematics education, 1990, 21: 47~60
- [6] 徐凡, 施建农. 4—5 年级学生的空间表征与几何能力的相关研究. 心理学报, 1992, 24(1): 20~27
- [7] Hegarty M, Mayer R E, Monk C A. Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. Journal Educational Psychology, 1995, 87(1): 18~32
- [8] 纪桂萍, 焦书兰, 何海东. 小学生数学问题解决与心理表征. 心理发展与教育, 1996, (1): 29~32
- [9] Anand P G, Ross S M. Using computer-assisted instruction to personalize arithmatic materials for elementary school children. Journal of Education Psychology, 1987 (2): 72~78
- [10] Simon H A. 认知科学的一些最新进展. 心理学报, 1991, 23(2): 153~157
- [11] Lean C, Clements M A. Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12: 267~299
- [12] Hegarty M, Kozhevnikov M. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology, 1999, 4: 684~689
- [13] Dixon J A, Moore C F. Characterizing the intuitive representation in problem solving: Evidence from evaluating mathematical strategies. Memory & Cognition, 1997, 25(3): 395~412

- [14] Farah M J, Hammond K M, Levine D N, et al. Visual and spatial memory: Dissociable systems of representation. *Cognitive psychology*, 1988, 20: 439~462
- [15] Kosslyn S M. Mental imagery. In: Kosslyn S M, Osherson D N ed. *Visual cognition: An invitation to cognitive science*(Vol. 2). Cambridge, MA: MIT Press, 1995. 267~296
- [16] Logie R H. *Visuo-spatial working memory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1995
- [17] 刘凡. 学前儿童解算术应用题的表征活动. *心理科学通讯*, 1990, 1: 14~19
- [18] 刘广珠. 小学生解决分数应用题认知加工过程的实验研究. *心理发展与教育*, 1997, 3: 7~10
- [19] 何海东, 焦书兰, 丁锦红. 整体与部件表征在物体图形识别中的作用. *心理学报*, 2000, 32(2): 152~157
- [20] 杨小冬, 方格, 毕鸿燕等. 非空间问题中运用空间表征策略的研究综述. *心理科学*, 2001, 24(1): 78~80
- [21] Markman, Dietrich. In *Defense of Representation*. *Cognitive Psychology*, 2000, 40(2): 160~167
- [22] Novick L R, Hurley S M, Francis M. Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory cognition*, 1999, 27(2), 288~308
- [23] Greeno J G. Process of understanding in problem solving. *Cognitive theory* (vol.2) Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1977, 4~83
- [24] Novick L R, Hmelo C E. Transferring symbolic representations across nonisomorphic problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & cognition*, 1994, 20(6): 1296~1321
- [25] Wertheimer M. A Gestalt perspective on computer simulations of cognitive processes. *Computers in Human Behavior*, 1985, 1: 19~33
- [26] 王甦, 汪安圣. *认知心理学*. 北京: 北京大学出版社, 1992. 289~292
- [27] 张庆林, 管鹏. 小学生表征应用题的元认知分析. *心理发展与教育*, 1997, 3: 11~14

A REVIEW OF RESEARCHES ON THE STYLES OF PROBLEM REPRESENTATION AND MATHEMATICAL PROBLEM-SOLVING

Xu Xingchun, Liu Dianshi

(Education Faculty, Southwest China Normal University, Chongqing 400715)

Abstract: The study expatiates the role of the mathematics problem representation in problem-solving; discusses the relations between different styles of problem representation, such as abstract representation, principle representation, schematic representation, et al. and mathematical problem-solving; in the end, this study presents two strategies in order to find the feasible problem representation through selecting and transferring.

Key words: problem representation, mathematical problem-solving, style of presentation, selecting, transferring